مجتمع اموزشی هوردخت

جزوه درس : هندسه پایه یازدهم

مالف : سارا میرزاده

سال تحصیلی: ۱۴۰۰-۱۴۰۱

جزوه هندسه

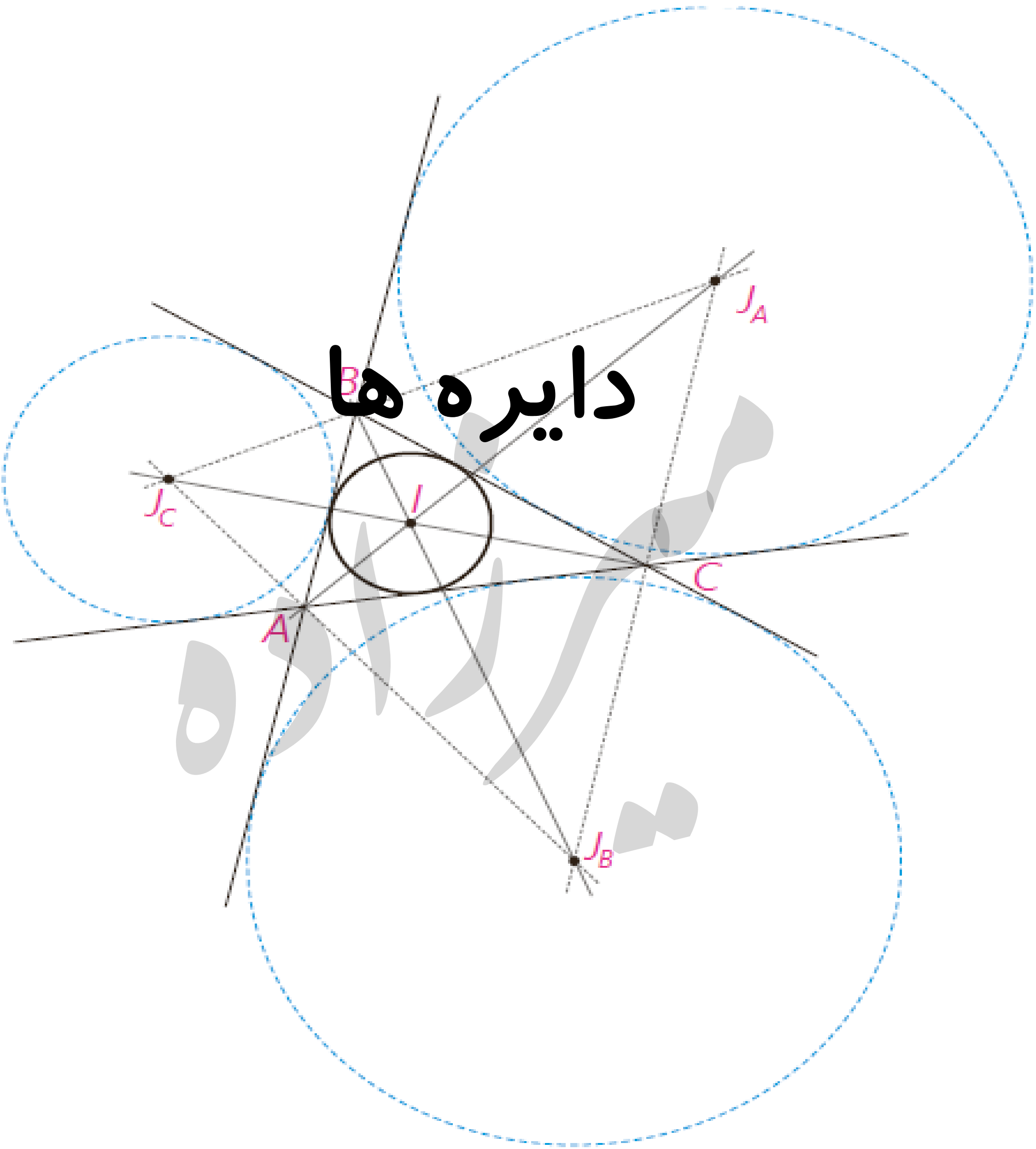
پایه یازدهم

تهیه و تنظیم: سارا میرزاده

GEOMETRY

فصل اول

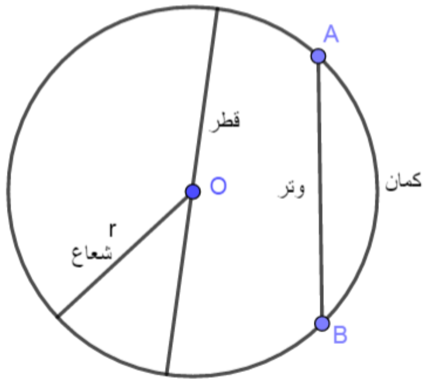
دایره ها



درس اول : مفاهیم اولیه و زاویه ها در دایره

دایره : مجموعه نقاطی از صفحه که فاصله آنها تا نقطه ثابتی بنام مرکز مقدار مشخص می باشند . که این مقدار مشخص را شعاع می نامیم .

معمولا دایره C به مرکز O و شعاع r را بصورت $C\,(O\,.r)$ نمایش می دهیم .



پارامترهای اصلی در یک دایره :

شعاع : فاصله مرکز دایره تا نقاط روی محیط دایره .

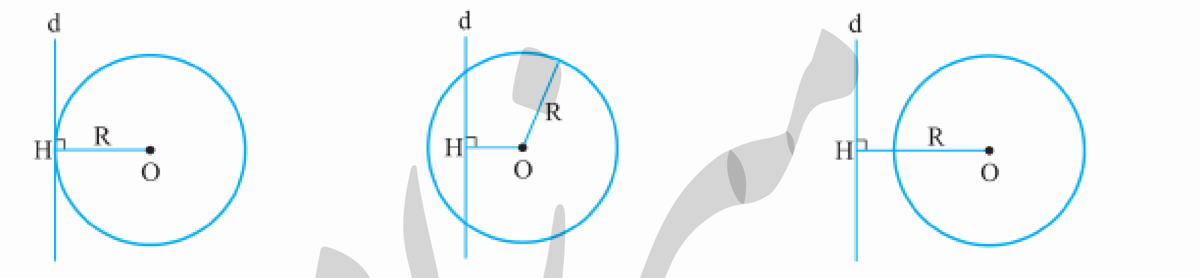
وتر : پاره خطی که دو نقطه روی محیط دایره را به هم وصل میکند.

قطر : وتری از دایره که از مرکز دایره می گذرد . در واقع بزرگترین وتر دایره می باشد.

کمان: شامل دو نقطه روی دایره و تمام نقاط بین آن دو نقطه است .

تذکر : هر قطر ، دایره را به دو کمان مساوی تقسیم میکند که به آن کمان ها نمی دایره می گوییم.

وضعیت خط و دایره : خط و دایره در یکی از سه حالات زیر قرار دارند.



خط و دایره مماس‌اند.$(OH = R)$ خط و دایره متقاطع‌اند.$(OH < R)$ خط و دایره نقطهٔ اشتراکی ندارند.$(OH > R)$

قضیه مهم : در یک صفحه یک خط و دایره بر هم مماس اند اگر و تنها اگر این خط بر شعاع در نقطه تماس عمود باشد .

مثال های بیشتر :

۱.کمترین و بیشترین فاصله نقطه ای از دایره ای به ترتیب a و b است. شعاع این دایره کدام است؟

۱) $\frac{b-a}{۲}$ ۲) $\frac{b-a}{۴}$ ۳) $\frac{b+a}{۲}$ ۴) $\frac{b+a}{۴}$

۲. دایره C و خط Δ در یک صفحه داده شده اند. چند نقطه روی دایره C می توان پیدا کرد، از خط Δ به فاصله معلوم L باشند؟

۱) فقط دو نقطه ۲) حداکثر دو نقطه ۳) فقط چهار نقطه ۴) حداکثر چهار نقطه

۳. نقطه P در صفحه دایره C و در خارج آن واقع است. حداکثر تعداد نقطه های دایرهC ، به فاصله ۳ واحد از P کدام است؟

۱) فقط دو نقطه ۲) حداکثر دو نقطه ۳) فقط چهار نقطه ۴) حداکثر چهار نقطه

۴. تعداد نقطه هایی که از یک دایره و از دو خط موازی مماس بر آن دایره به یک فاصله اند، کدام است؟

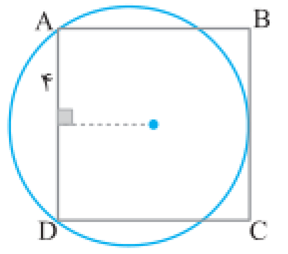
۱)صفر ۲)۲ ۳)۴ ۴) بی شمار

۵. در دایره ای، دو وتر موازی و مساوی، به فاصله ای برابر با شعاع دایره رسم شده اند. زاویه بین خطوط واصل انتهای دو وتر کدام است؟

۱)۱۲۰ ۲) ۳۰ ۳)۹۰ ۴) ۴۵

۶. در شکل مقابل، چهارضلعی ABCD مربعی به ضلع ۸ می باشد. دایره ای از رأسهای A و D گذشته و بر ضلع BC مماس است. شعاع این دایره کدام است؟

۱)۴ ۲)۸ ۳) ۳ ۴)۵



۷. دایره ای به شعاع ۴ درون یک مربع رسم شده است، به طوری که مرکز دایره، نقطه تلاقی دو قطر مربع می باشد. اگر فاصله هر رأس مربع از محیط دایره برابر ۲ باشد، مساحت مربع کدام است؟

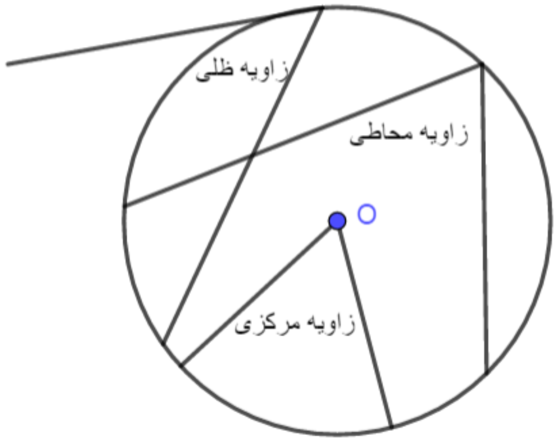
۱)۳۶ ۲) ۷۲ ۳) ۱۴۴ ۴) ۲۴

۸. خطوط موازی L_1 و L_2 از دایره $C(o\ ,\ 2)$ به فاصله ۳ و ۵ مفروض اند. اگر فاصله خطوط L_1 و L_2 برابر ۱۱ باشد، چند نقطه روی یک دایره قرار دارد که از هر دو خط به یک فاصله باشد؟

۱)۱ ۲) ۲ ۳) صفر ۴)۳

زاویه ها و دایره :

۱. زاویه مرکزی:
- راس زاویه : روی مرکز دایره
- اضلاع زاویه : دو شعاع دلخواه
- اندازه زاویه : برابر با کمان رو به رو



۲. زاویه محاطی :
- راس زاویه : روی محیط دایره
- اضلاع زاویه : دو وتر دلخواه
- اندازه زاویه : برابر با نصف کمان رو به رو

نکته : ۱.در هر دایره زاویه های محاطی رو به یک کمان باهم برابرند.

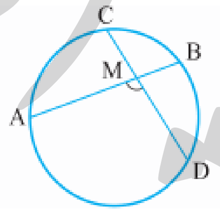
۲.زاویه محاطی رو به قطر دایره ، ۹۰° است.

۳. زاویه ظلی :
- راس زاویه : روی محیط دایره
- اضلاع زاویه : یک وتر دلخواه و دیگری مماسی بر دایره
- اندازه زاویه : برابر با نصف کمان رو به رو

۴. زاویه بین دو وتر در دایره :

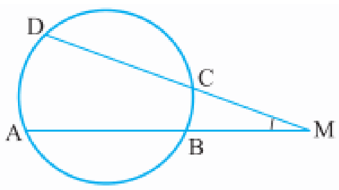
الف) زاویه بین دو وتر (زاویه داخلی)

$$\hat{M}=\frac{\overset{\frown}{AD}+\overset{\frown}{BC}}{۲}$$



ب) زاویه بین امتداد دو وتر (زاویه خارجی)

$$\hat{M}=\frac{\overset{\frown}{AD}-\overset{\frown}{BC}}{۲}$$

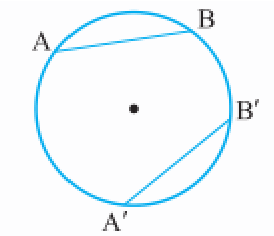


اثبات :

تمرین ۱: ثابت کنید اندازه هر زاویه محاطی برابر با نصف کمان روبه رو می باشد.

تمرین ۲: ثابت کنید اندازه هر زاویه ظلی برابر با نصف کمان روبه رو می باشد

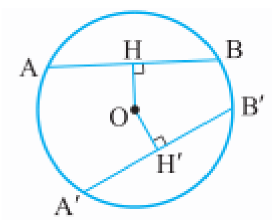
قضیه ۱ : اگر در دایره ای دو وتر برابر باشند ، کمان های متناظر آنها برابر است.



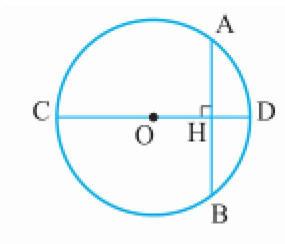
اثبات:

تمرین ۳: عکس قضیه بالا را نوشته و آنرا ثابت کنید.

تمرین ۴: ثابت کنید دو وتر در دایره برابرند اگر و تنها اگر فاصله آنها تا مرکز دایره به یک فاصله باشند.



قضیه ۲: قطر عمود بر یک وتر ، آن وتر و کمان نظیر آنرا نصف میکند .



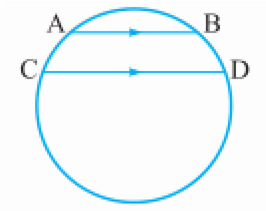
اثبات :

تمرین ۵: عکس قضیه بالا را نوشته و آنرا اثبات کنید.

نتیجه : وسط کمان های نظیریک وتر ، مرکز دایره و وسط وتر موردنظر همگی روی یک خط راست قرار دارند.

قضیه ۳ : ثابت کنید اگر دو وتر از یک دایره موازی باشند ، آنگاه کمان های محدود بین آنها نیز مساوی هستند.

اثبات:



مثال : در یک دایره نقطه C روی وتر AB آن را به دو پاره خط به طول های ۲ و ۱۴ سانتی متر تقسیم کرده است . اگر فاصله ی این نقطه تا مرکز دایره ۱۰ سانتی متر باشد ، مساحت دایره را بیابید .

مثال : شعاع های دو دایره هم مرکز ۵ و ۳ سانتی متر می باشد ، اندازه وتری از دایره بزرگتر را که بر دایره کوچکتر مماس است ، پیدا کنید .

رسم مماس بر دایره از نقطه ای خارج آن :

مثال :

الف) آیا از نقطه ای M خارج دایره $C(O\ .\ R)$ مماسی بر دایره رسم کنید ؟ چند تا ؟

ب) ثابت کنید طول مماس های رسم شده از هر نقطه خارج دایره با هم برابر اند .

پ) اگر دو خط MT و MT' در نقطه های T و T' بر دایره $C(O\ .\ R)$ مماس اند . ثابت کنید

۱) MO نیمساز زاویه TMT' است .

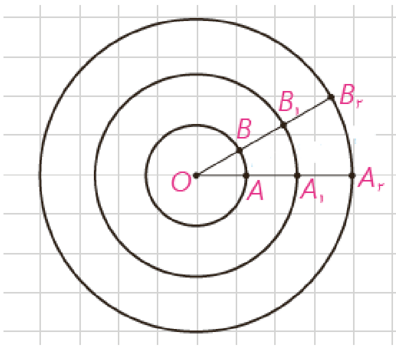
۲) MO عمود منصف TT' است .

ت) اگر H نقطه برخورد TT' با خط OM باشد ، ثابت کنید :

۱) $TT'^{۲} = ۴ \times OH \times HM$

۲) $OH \times OM = R^{۲}$

۳) $TT' \times OM = ۲\, R \times MT$



تذکر : توجه کنید که نباید اندازه یک کمان را با طول آن اشتباه بگیریم.به شکل روبه رو نگاه کنید.

سه دایره هم مرکز هستند:

$$\text{کمان } A_2B_2 = \text{کمان } A_1B_1 = \text{کمان } AB = \widehat{xOy}$$

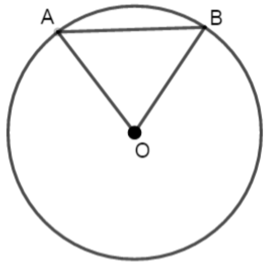
یعنی اندازه کمان ها باهم برابرند اما طول این کمان ها برابر نیستند.

$$\text{طول کمان } A_2B_2 > \text{طول کمان } A_1B_1 > \text{طول کمان } AB$$

رابطه بین طول و اندازه کمان دایره :

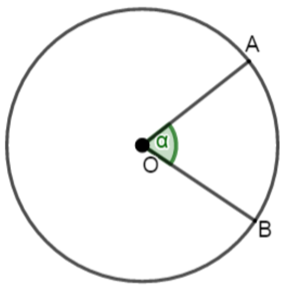
با یک نسبت ساده میتوان نوشت :

$$\frac{(\text{اندازه کمان } AB = \propto)}{۳۶۰^\circ} = \frac{(\text{طول کمان } AB = L)}{(\text{محیط دایره} = ۲\pi R)} \Rightarrow L = \frac{۲\pi R \propto}{۳۶۰^\circ}$$



مثال: در شکل مقابل شعاع دایره برابر ۱۲ و طول کمان کوچک تر AB برابر ۴π است . اندازه وتر AB را بدست آورید.

قطاع :

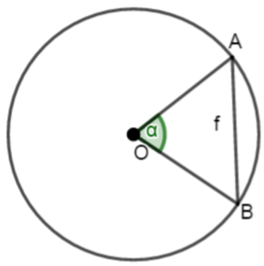


به شکل رو به رو نگاه کنید . به قسمتی از سطح دایره که بین دو شعاع آن محدود است قطاع می گوییم.

کمان AB را کمان قطاع ، R را شعاع قطاع و ∝ را زاویه قطاع می گوییم.

برای پیداکردن مساحت قطاع با نوشتن نسبتی ساده خواهیم داشت :

$$\frac{\propto}{۳۶۰^\circ} = \frac{S}{\text{مساحت دایره} = \pi R^۲} \Rightarrow S = \frac{\pi R^۲ \propto}{۳۶۰^\circ}$$



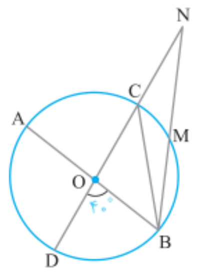
قطعه: قسمتی از سطح دایره محصور بین یک کمان و وتر نظیر آن را قطعه دایره می نامیم.

برای محاسبه مساحت قطعه بصورت زیر عمل می کنیم.

(مساحت مثلث OAB)−(مساحت قطاع OAB) = مساحت قطعه ∝

مثال : دایره ای در قطاع 60° از دایره ای به شعاع ۸ محاط شده است . شعاع این دایره را پیدا کنید.

مثال :

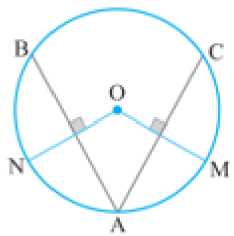


۹.در شکل مقابل، نقطه O مرکز دایره است. اگر $BC = CN$ باشد، اندازه زاویه MAB کدام است؟

۱) ۳۰ ۲) ۵۰ ۳) ۴۰ ۴) ۶۰

۱۰. در دایره ای به شعاع R ، دو قطر عمود بر هم مفروض اند . از نقطه A روی دایره ، عمود هایی ب این دو قطر رسم می کنیم . فاصله بین پای این عمود ها کدام است ؟

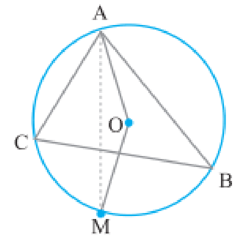
۱) $\frac{R}{۲}$ ۲) R ۳) $\frac{\sqrt{۳}}{۲}R$ ۴) $\frac{\sqrt{۳}}{۳}R$



۱۱. در شکل رو به رو ، O مرکز دایره و $\widehat{MC} = ۲۷^\circ$ و $\widehat{BN} = ۲۳^\circ$ است . اندازه $\widehat{MON}$ کدام است ؟

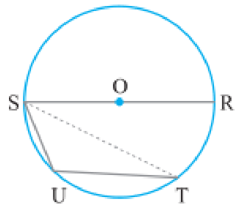
۱) ۵۰ ۲) ۴۵ ۳) ۳۰ ۴) ۲۵

. در شکل مقابل، نقطهٔ M وسط کمان BC است. اگر زاویهٔ B به اندازهٔ ۲۰° کمتر از زاویهٔ C باشد، زاویهٔ OMA کدام است؟



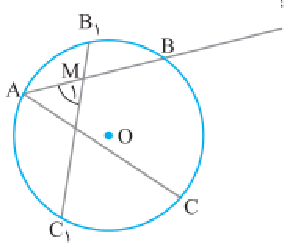
۱) ۶۰°
۲) ۴۰°
۳) ۲۰°
۴) ۱۰°

. در شکل زیر، $\widehat{UST}=۲۵^\circ$ است. اگر $UT=TR$ باشد، کمان UTR کدام است؟



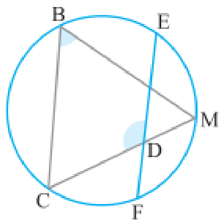
۱) ۷۵° ۲) ۲۵°
۳) ۵۰° ۴) ۱۰۰°

. در شکل زیر، $B_۱$ و $C_۱$ وسط‌های کمان‌های AB و AC هستند. اگر $\hat{M}_۱=۳۰^\circ$ باشد، $\widehat{BAC}$ کدام است؟



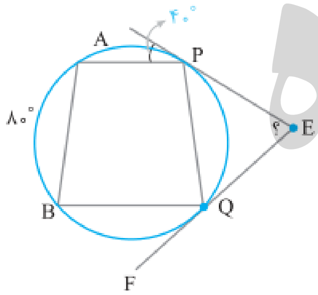
۱) ۱۲۰°
۲) ۹۰°
۳) ۶۰°
۴) ۳۰°

. در شکل زیر، M وسط کمان EF و $\overset{\frown}{BC}=۵۰^\circ$ است. اندازهٔ $\hat{B}+\hat{D}$ چند درجه است؟



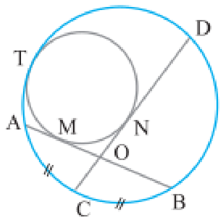
۱) ۱۶۰
۲) ۱۷۵
۳) ۱۸۰
۴) ۲۳۰

. در شکل مقابل اگر $AP \parallel BQ$، مجموع زاویهٔ بین دو نیم‌مماس EP و EQ و زاویهٔ BAQ کدام است؟



۱) ۱۶۰°
۲) ۸۰°
۳) ۴۰°
۴) ۱۲۰°

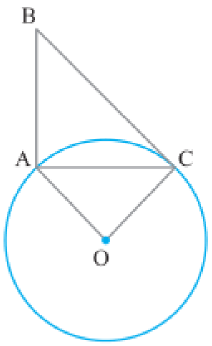
. در شکل مقابل، دایرهٔ کوچک‌تر در نقاط M و N به ترتیب بر AB و CD مماس هستند. اگر $\overset{\frown}{AB}=\overset{\frown}{BD}=۲\overset{\frown}{AC}=۶۰^\circ$ باشد، اندازهٔ زاویهٔ MTN کدام است؟



۱) ۴۵°
۲) ۷۵°
۳) ۹۰°
۴) $۲۲/۵^\circ$

. اندازهٔ کمان دایره به مرکز O و به زاویهٔ ۴۵ درجه، با اندازهٔ کمان دایره به مرکز O' و زاویهٔ °۳۰ برابر است. نسبت مساحت دایرهٔ O به دایرهٔ O' چقدر است؟

۱) $\frac{۴}{۹}$ ۲) $\frac{۵}{۹}$ ۳) $\frac{۱۶}{۹}$ ۴) $\frac{۷}{۹}$



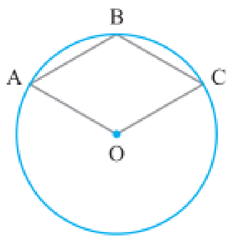
. در شکل مقابل، شعاع دایره برابر $\frac{۸}{\pi}$ و مثلث ABC ، قائم‌الزاویهٔ متساوی‌الساقین به زاویهٔ قائمهٔ CAB است. اگر وتر BC بر دایره مماس باشد، طول کمان AC کدام است؟

۱) $\frac{\pi}{۱۶}$

۲) $\frac{۱۶}{\pi}$

۳) ۴

۴) ۲



. در شکل مقابل، OABC لوزی است. اگر محیط دایره برابر ۳۰ باشد، طول کمان ABC کدام است؟

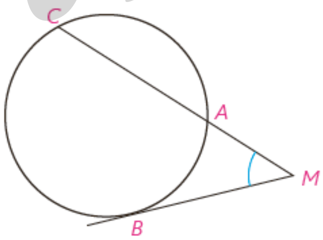
۱) ۱۰ ۲) ۲۰

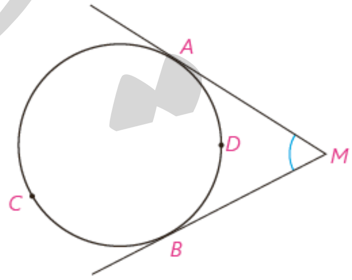
۳) ۳۰ ۴) ۱۵

مسائل بخش اول کتاب درسی:

۱ – در شکل های زیر ثابت کنید :

(راهنمایی: از نقطه B خطی موازی ضلع دیگر زاویه رسم کنید.)

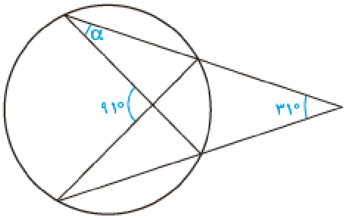




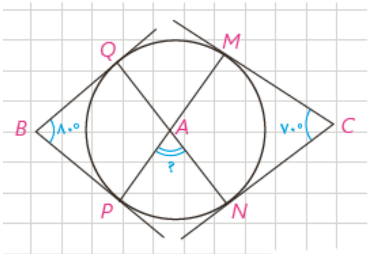
ب) $\hat{M}=\frac{\overset{\frown}{BC}-\overset{\frown}{AB}}{۲}$

الف) $\hat{M}=\frac{\overset{\frown}{ACB}-\overset{\frown}{ADB}}{۲}$

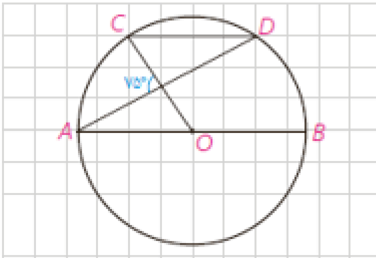
۲. در شکل مقابل زاویه مجهول را بدست آورید .



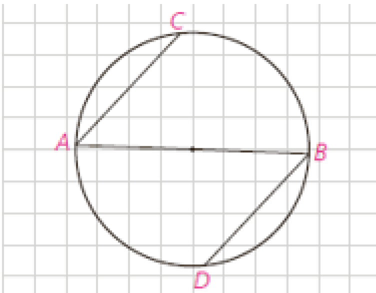
۳. در شکل زیر اضلاع زاویه های B و C بر دایره مماس اند. اندازه زاویه A چند درجه است ؟



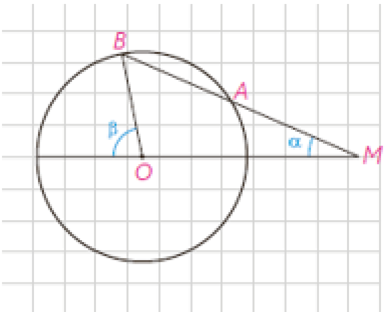
۴. در دایره رسم شده شکل مقابل $CD||AB$ ، اندازه کمان DC را بدست آورید .



۵. در شکل مقابل AB قطری از دایره است و $AC||BD$. ثابت کنید کمان های BD و AC برابراند.



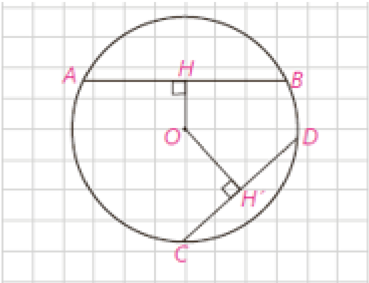
۶. در دایره زیر از نقطه M خارج دایره خطی چنان رسم کرده ایم که دایره را در نقاط B و A قطع کرده است و $MA = R$. نشان دهید :
$\beta = ۳\alpha$.



۷. در دایره $C(O.R)$ ، $AB = ۶۰°$ و $AB = ۱۰$ می باشد . فاصله مرکز از وتر AB را بدست آورید .

۸. در دایره ، نشان دهید $AB > CD$ اگر و تنها اگر $OH < OH'$.

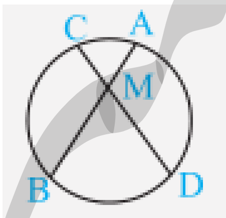
(OH و OH' فاصله O از دو وتر AB و CD هستند .)

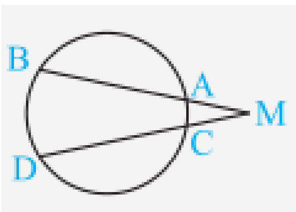


درس دوم : رابطه های طولی در دایره

گاهی دو وتر دلخواه در دایره ممکن است یکدیگر را در داخل و یا خارج دایره قطع کنند ، گاهی نیز ممکن است مماسی بر دایره وتری دلخواه در دایره را در بیرون دایره قطع کنند ، در هر یک از حالات روابطی بین پاره خط های ایجاد شده بوجود می آید که در زیر آنها را بیان و اثبات خواهیم کرد.

قضیه۴: اگر دو وتر درون دایره ، یا امتداد دو وتر در بیرون دایره متقاطع باشند ، داریم :

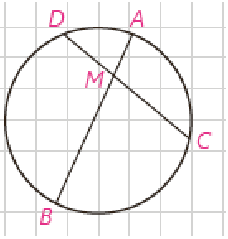




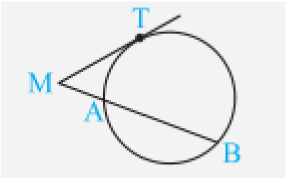
$$MA \cdot MB = MC \cdot MD$$

اثبات:

مثال : در دایره زیر وتر AB ، وتر CD به طول ۹ سانتی متر را به نسبت ۱به۲ تقسیم کرده است . اگر AB=11cm باشد ، آنگاه وتر CD وتر AB را به چه نسبتی قطع می کند ؟



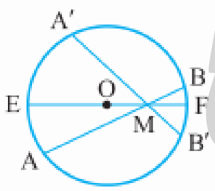
قضیه۵: اگر از یک نقطه خارج دایره مماس و قاطعی بر دایره رسم شود ، داریم:



$$MT^{2} = MA \cdot MB$$

اثبات:

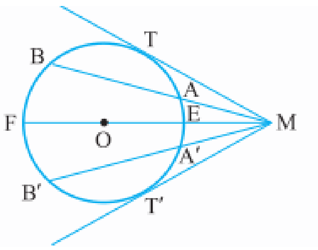
نتیجه ۱: اگر M درون دایره باشد ، آنگاه با فرض $OM = d$، حاصل ضرب پاره خط هایی که این نقطه روی هر وتر گذرنده از این نقطه پدید می آورد ، برابر مقدار ثابت $R^{2} - d^{2}$ است.



$$MA \times MB = MA' \times MB' = \cdots = ME \times MF = R^{2} - d^{2}$$

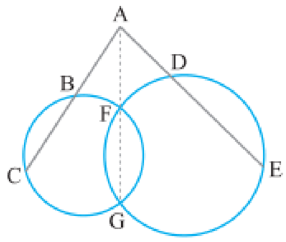
نتیجه۲ : اگر از نقطه M خارج دایره ، هر مماس و قاطعی بر دایره رسم کنیم،آنگاه با فرض اینکه $OM = d$ حاصل ضرب اندازه های قطعه های قاطع ها با هم برابر و همگی با مربع طول مماس ها مساوی اند.

$$MT^{2} = MT'^{2} = MA \times MB = MA' \times MB' = \cdots = ME \times MF = d^{2} - R^{2}$$



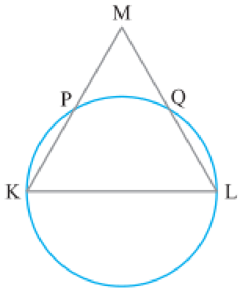
مثال : از نقطه P خارج دایره ای ، مماس PA به طول $10\sqrt{3}$ را بر آن رسم کرده ایم .همچنین خط راستی از P گذرانده ایم که دایره را در دو نقطه A و B قطع کرده است و BC=20 .طول های PB و PC را بدست آورید.

مثال :



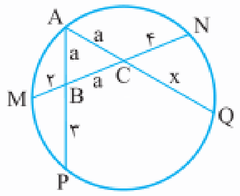
در شکل مقابل، $AB = ۶$ و $BC = ۶$ است. اگر $AD = ۴$ باشد، اندازهٔ DE چند سانتی‌متر است؟

۱) ۷
۲) ۱۷
۳) ۱۴
۴) ۲۴



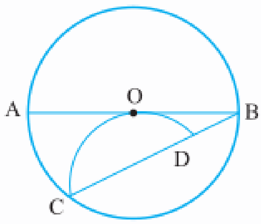
. در شکل مقابل، KL قطر دایره است. اگر $P\hat{K}L = ۶۰^\circ$ و $MQ = MP = ۱$ باشد، شعاع دایره کدام است؟

۱) ۲
۲) ۱
۳) $\frac{۱}{۲}$
۴) ۳



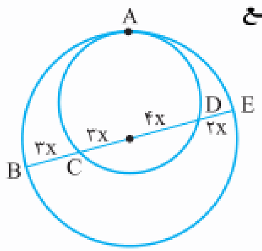
- دایرهٔ Ω به شعاع r و مثلث متساوی‌الاضلاع ABC به طول ضلع a درون آن مفروض است. اگر A روی محیط دایره باشد و امتداد ضلع BC دایره را در نقاط N و M و امتداد اضلاع AB و AC دایره را به ترتیب در نقاط P و Q قطع کند و $BP = ۳$ ، $MB = ۲$ و $CN = ۴$ باشد، آن‌گاه مقدار CQ کدام است؟

۱) ۴
۲) ۴/۵
۳) ۵
۴) ۵/۵



- در دایره‌ای به قطر $AB = ۱۲$ و به مرکز O، نیم‌دایره‌ای به قطر CD در نقطهٔ O بر AB مماس است و امتداد CD از B می‌گذرد. شعاع نیم‌دایره کدام است؟

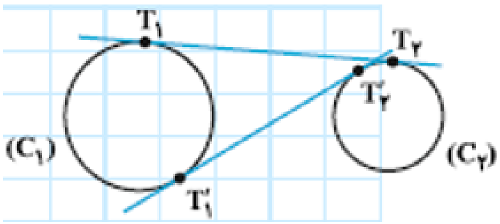
۱) $۲\sqrt{۳}$
۲) $۳\sqrt{۲}$
۳) ۴
۴) ۳



- در شکل مقابل، دو دایره در نقطهٔ A مماس‌داخل هستند. خطی از مرکز دایرهٔ بزرگ‌تر می‌گذرد و دایره‌ها را قطع می‌کند. اگر $\frac{DE}{۲} = \frac{CD}{۷} = \frac{BC}{۳}$ باشد، آن‌گاه نسبت شعاع دایرهٔ بزرگ‌تر به دایرهٔ کوچک‌تر کدام است؟

۱) $\frac{۵}{۳}$
۲) $\frac{۷}{۴}$
۳) $\frac{۴}{۳}$
۴) $\frac{۳}{۲}$

مماس مشترک و بررسی وضعیت دو دایره نسبت به هم

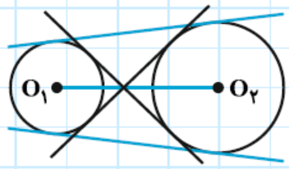
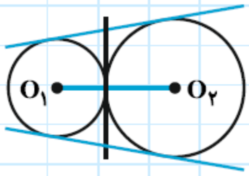
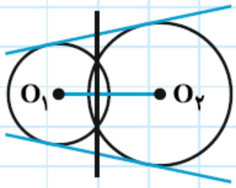
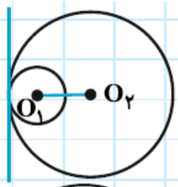
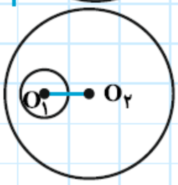
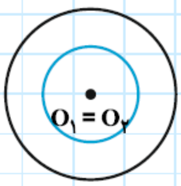


مماس مشترک دو دایره : خطی است که بر هر دو دایره مماس است.

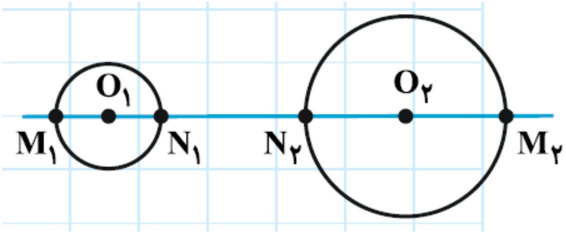
- **اگر دو دایره در یک طرف این خط باشند ، آن را مماس مشترک خارجی می نامند.**
- **اگر دو دایره در دو طرف این خط باشند ، آن را مماس مشترک داخلی می نامند.**

اوضاع نسبی دو دایره در صفحه:

دو دایره $C_1(O_1 , R_1)$ و $C_2(O_2 , R_2)$ را در نظر بگیرید. اگر طول خط المرکزین این دو دایره را d در نظر بگیریم . دو دایره نسبت به هم یکی از شش وضعیت زیر را دارند.

تعداد مماس‌های مشترک خارجی	تعداد مماس‌های مشترک داخلی	روابط بین شعاع‌ها و فاصلهٔ بین مراکز دو دایره	نوع وضعیت	وضعیت شکل
۲	۲	$d > R_1 + R_2$	متخارج	
۲	۱	$d = R_1 + R_2$	مماس خارج	
۲	صفر	$\lvert R_2 - R_1 \rvert < d < R_1 + R_2$	متقاطع	
۱	صفر	$d = \lvert R_2 - R_1 \rvert$	مماس داخل	
صفر	صفر	$d < \lvert R_2 - R_1 \rvert$	متداخل	
صفر	صفر	$d = 0$	هم مرکز	

نکته : دو دایره $C_1(O_1 . R_1)$ و $C_2(O_2 . R_2)$ را در نظر بگیرید.خط المرکزین دو دایره را رسم کرده و از دو طرف امتداد می دهیمتا هر یک از دو دایره را در دو نقطه قطع کند ، داریم :



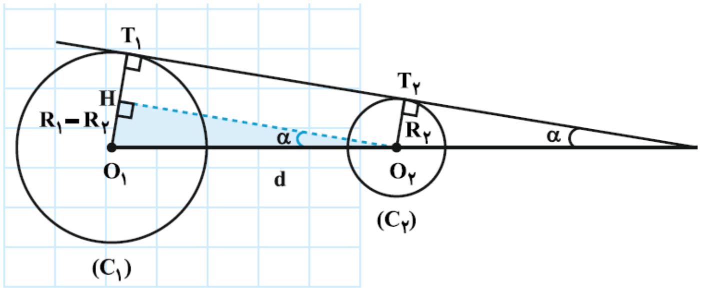
C_2 و C_1 بیش‌ترین فاصلهٔ بین نقاط دو دایرهٔ : $M_1M_2 = d + (R_1 + R_2)$

C_2 و C_1 کم‌ترین فاصلهٔ بین نقاط دو دایرهٔ : $N_1N_2 = d - (R_1 + R_2)$

محاسبه طول های مماس مشترک دو دایره

۱ . برای محاسبه طول مماس مشترک خارجی دو دایره ، مطابق شکل ، از مرکز دایره کوچک تر عمودی بر شعاع گذرنده از نقطه تماس در دایره بزرگ تر رسم می کنیم. با به کاربردن قضیه فیثاغورس در مثلث قائم الزاویه HO_1O_2 طول، $O_2H = T_1T_2$ بدست می آید.

هم چنین اگر $\propto$ زاویه مماس مشترک خارجی با خط المرکزین باشد، داریم :

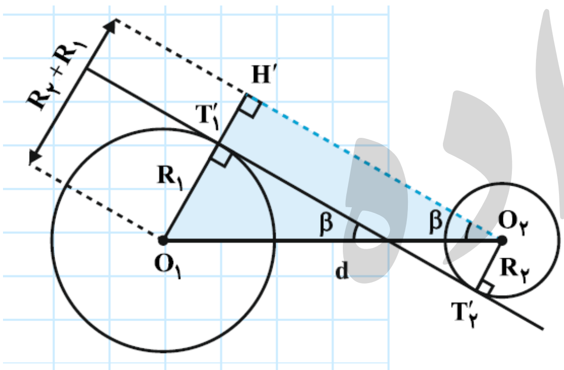


$$T_1T_2 = \sqrt{d^2 - (R_1 - R_2)^2} \quad \text{و} \quad \sin\alpha = \frac{R_1 - R_2}{d}$$

۲ . برای محاسبه طول مماس مشترک داخلی دو دایره ، مطابق شکل ،

از مرکز دایره کوچک تر ، عمودی بر امتداد شعاع گذرنده از نقطه تماس در دایره بزرگ تر رسم میکنیم . با به کار بردن قضیه فیثاغورس در مثلث $H'O_1O_2$ ، طول $O_2H' = T'_1T'_2$ بدست می آید.

هم چنین اگر β زاویه مماس مشترک داخلی با خط المرکزین باشد، داریم :



$$T'_1T'_2 = \sqrt{d^2 - (R_1 + R_2)^2} \quad \text{و} \quad \sin\beta = \frac{R_1 + R_2}{d}$$

تذکر : طول مماس مشترک خارجی دو دایره از طول مماس مشترک داخلی آنها (درصورت وجود) بزرگ تر است.

نکته : اگر دو دایره مماس خارج باشند :

۱) مماس مشترک داخلی این دو دایره ، از وسط مماس مشترک های خارجی آنها می گذرد . (چرا؟)

۲) مثلثی که دو راس آنها ، دو نقطه تماس یک مماس مشترک خارجی و راس سوم آن نقطه تماس مماس مشترک داخلی است ، قائم الزاویه است . (چرا؟)

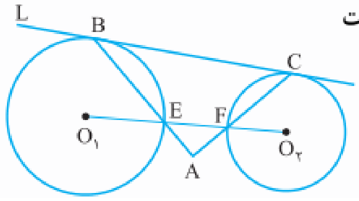
۳) دایره به قطر خط المرکزین دو دایره مماس خارج ، بر مماس مشترک خارجی آنها مماس است . (چرا؟)

نکته : مماس مشترک های خارجی و خط المرکزین دو دایره غیر برابر همرس اند .

توجه : اگر دو دایره برابر باشند، مماس مشرک های خارجی و خط المرکزین آنها باهم موازی اند.

مثال:

در شــکل مقابــل، دو دایــره متخــارج هــستند و خــط L بــر هــر دو دایــره ممــاس اســت. ثابــت کنید $AB \perp AC$.



. دو دایره به شعاع‌های ۱۳ و ۱۵ واحد در دو نقطه به فاصلهٔ ۲۴ واحد، با هم اشتراک دارند. فاصلهٔ مرکز دو دایره کدام است؟

۱) ۲۶   ۲) ۱۲   ۳) ۱۴   ۴) ۲۸

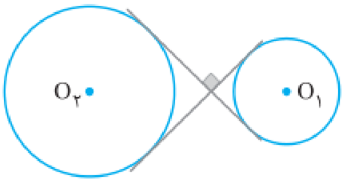
. دو دایره به شعاع‌های ۴ و ۱۰/۵ واحد مماس برون‌اند. از مرکز دایرهٔ کوچک‌تر مماسی بر دایرهٔ بزرگ‌تر رسم می‌کنیم. طول این قطعه مماس چقدر است؟

۱) ۸   ۲) $۴\sqrt{۵}$ ۳) $۴\sqrt{۶}$ ۴) ۱۰

. دو دایرهٔ هم‌مرکز مفروض‌اند. در دایرهٔ بزرگ‌تر، دو وتر مساوی و عمود بر هم که بر دایرهٔ کوچک‌تر مماس هستند، یکدیگر را به دو قسمت ۳ و ۷ واحد تقسیم می‌کنند. شعاع دایرهٔ کوچک‌تر کدام است؟

۱) ۱۰   ۲) ۲   ۳) ۴   ۴) ۵

. در شکل زیر، اگر شعاع دایره‌ها به ترتیب ۴ و ۲ باشند، طول مماس‌مشترک داخلی آن‌ها کدام است؟



۱) ۲   ۲) ۱

۳) ۳   ۴) ۶

. شعاع دو دایرهٔ خارج از هم به ترتیب ۲۲/۵ و ۷/۵ سانتی‌متر است. اگر زاویهٔ بین مماس داخل و خط‌المرکزین دو دایره، ۳۰ درجه باشد، طول خط‌المرکزین دو دایره چند سانتی‌متر است؟

۱) ۵۵   ۲) ۵۷/۵   ۳) ۶۰   ۴) ۶۲/۵

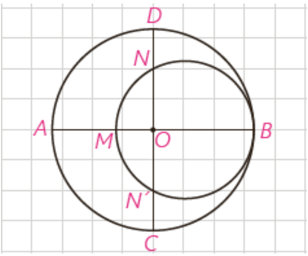
. طول مماس‌مشترک خارجی دو دایره به شعاع‌های ۱۱ و ۳ سانتی‌متر، $۳\sqrt{۳۳}$ سانتی‌متر است. کمترین فاصلهٔ نقاط این دو دایره از یکدیگر چند سانتی‌متر است؟

۱) ۳   ۲) ۴   ۳) ۵   ۴) ۶

طول مماس‌مشترک خارجی دو دایرهٔ مماس بر هم، $\sqrt{۲}$ برابر شعاع دایرهٔ بزرگ‌تر است. شعاع دایرهٔ بزرگ‌تر چند برابر شعاع دایرهٔ کوچک‌تر است؟

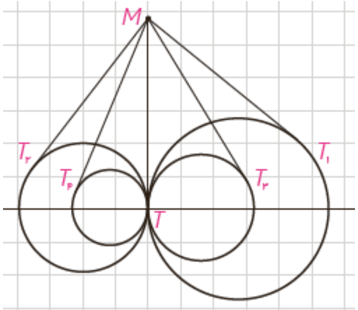
۱) $\sqrt{۲}$ ۲) ۱/۵   ۳) $\sqrt{۳}$ ۴) ۲

مسائل بخش دوم کتاب درسی:



۱.در شکل مقابل ، دو دایره بر هم مماس و دو قطر CD و AB از دایره بزرگ تر بر هم عمود اند . اگر $AM = ۱۶$ و $ND = ۱۰$، شعاع های دو دایره را بیابید .

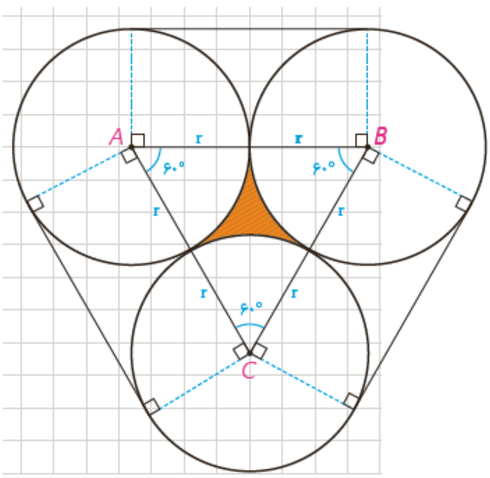
۲.مطابق شکل مقابل ، تمام دایره ها در نقطه T بر هم مماس اند و از نقطه M روی مماس مشترک آنها بر دایره ها مماس رسم کرده ایم ، ثابت کنید : $MT_1 = MT_2 = MT_3 = MT_4$.



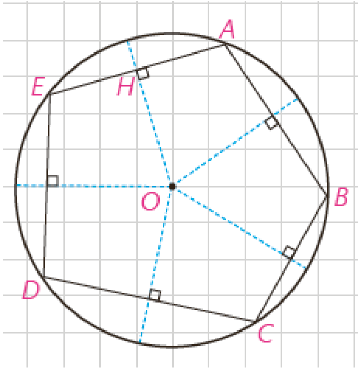
۳.طول شعاع های دو دایره متخارج را بدست آورید که طول مماس مشترک خارجی آنها مساوی $3\sqrt{7}$ و طول مماس مشترک داخلی آنها $\sqrt{15}$ و طول خط المرکزین آنها مساوی ۸ است .

۴.طول خط المرکزین دو دایره مماس درونی ۲ سانتی متر و مساحت ناحیه محدود بین آنها ۱۶ π سانتی متر مربع است . طول شعاع های دو دایره را بیابید.

۵. سه دایره به شعاع های برابر r دو به دو بر هم مماس اند . مطابق شکل مقابل این سه دایره به وسیله نخی بسته شده اند . نشان دهید طول این نخ برابر $6r + 2\pi r$ است و هم چنین نشان دهید مساحت ناحیه محدود به سه دایره برابر $r^2\left(\sqrt{3} - \frac{\pi}{2}\right)$ است .



درس سوم : چند ضلعی های محاطی و محیطی



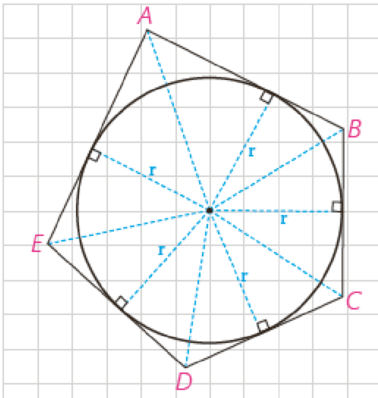
تعریف: یک چند ضلعی را محاطی گوییم ، هرگاه تمام راس های آن روی محیط دایره باشد.

در این صورت دایره را دایره محیطی آن چند ضلعی می نامیم.

قضیه۶: مرکز دایره محیطی یک چند ضلعی ، نقطه همرسی عمودمنصف های همه اضلاع آن می باشد.

اثبات:

نتیجه : یک چند ضلعی محاطی است $\Longleftrightarrow$



تعریف : یک چندضلعی را محیطی گوییم هرگاه تمام اضلاع آن بر دایره مماس باشند .

در این صورت دایره را دایره محاطی آن چند ضلعی می گوییم.

قضیه۷: مرکز دایره محاطی یک چندضلعی ، نقطه همرسی نیمسازهای داخلی همه زاویه های آن می باشد.

اثبات :

نتیجه : یک چندضلعی محیطی است $\Longleftrightarrow$

؟ سوال : آیا می توانید نشان دهید مساحت چند ضلعی محیطی برابر است با " حاصل ضرب شعاع دایره محاطی آن در نصف محیط چندضلعی "

مثلث های محاطی و محیطی : (دایره های محیطی و محاطی مثلث)

سوال ۱: دایره ای رسم کن که بر سه ضلع مثلث دلخواه ABC مماس شود . (دایره محاطی داخلی مثلث)

آیا می توانید رابطه ای برای شعاع این دایره بدست آورید ؟

سوال ۲: دایره ای رسم کن که از سه راس مثلث دلخواه ABC بگذرد .(دایره محیطی مثلث)

نشان دهید شعاع دایره محیطی مثلث از رابطه زیر بدست می آید ؟

$$r = \frac{abc}{4\,s}$$

نکته : در حالت خاص ، شعاع دایره محیطی مثلث قائم الزاویه برابر است با ....

بعبارت دیگر قطر دایره محیطی مثلث قائم الزاویه همان وتر مثلث است .(چرا ؟)

بنابراین :

مرکز دایره محیطی مثلث قائم الزاویه ، .... است.

تمرین ۸: شعاع دایره محیطی مثلث متساوی الاضلاعی به ضلع a را بدست آورید .

تمرین ۹: ثابت کنید نیمساز هر زاویه داخلی مثلث ، زاویه بین قطر دایره محیطی مثلث و ارتفاع وارد بر ضلع رو به رو به همان زاویه را نصف می کند.

تمرین ۱۰: ثابت کنید عمودمنصف یک ضلع هر مثلث و نیمساز زاویه مقابل به آن ضلع ، یکدیگر را روی محیط دایره محیطی مثلث قطع می کنند .

مثال :

در مثلث ABC از مرکز دایره محیطی ، عمودی بر ضلع AC رسم میکنیم که ضلع BC را در نقطه E قطع می کند ، اگر CE = ۱۰ باشد ، اندازه AE کدام است ؟

۱)۳۰   ۲) ۲۰   ۳) ۵   ۴) ۱۰

در یک مثلث ، مساحت و محیط از نظر عددی با هم برابر اند . شعاع دایره محاطی این مثلث کدام است ؟

۱)۲   ۲) ۳   ۳) ۴   ۴) ۵

دایره محاطی داخلی یک مثلث به طول اضلاع ۱۳ ، ۹ و ۸ در نقطه تماس ، ضلع کوچکتر را به دو قطعه تقسیم می کند . نسبت این دو قطعه کدام است ؟

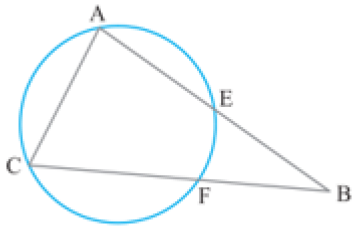
۱)$\frac{۱}{۳}$ ۲) $\frac{۲}{۵}$ ۳) $\frac{۳}{۷}$ ۴) $\frac{۲}{۳}$

در مثلث ABC ، ارتفاع های BD و CE دایره محیطی مثلث را در M و N قطع کرده اند . اگر کمان NAM ، ۴۰ باشد ، کمان NA کدام است ؟

۱) ۲۰ ۲) ۴۰ ۳) ۴۵ ۴) ۳۰

در شکل مقابل ، $\widehat{AEC} = ۵\widehat{BAF}$ می باشد . اگر $\widehat{ABC} = ۳۶$ و $AC = ۶$ باشد ، شعاع دایره محیطی مثلث AEC کدام است ؟

۱) $۳\sqrt{۳}$ ۲) ۶ ۳) ۳ ۴) $۳\sqrt{۲}$

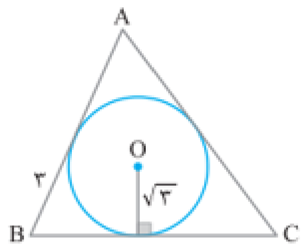


دایره محاطی مثلث متساوی الساقین ABC بر ساق های AB و AC به ترتیب در T و M مماس است . اگر $AB = ۲۵$ و $BC = ۱۴$ باشد ، TM کدام است ؟

۱) $\frac{۳۵۲}{۱۷}$ ۲) $\frac{۲۴۹}{۱۷}$ ۳) $\frac{۲۵۰}{۲۷}$ ۴) $\frac{۲۵۲}{۲۵}$

در شکل مقابل ، اندازه زاویه $\widehat{ABC}$ کدام است ؟

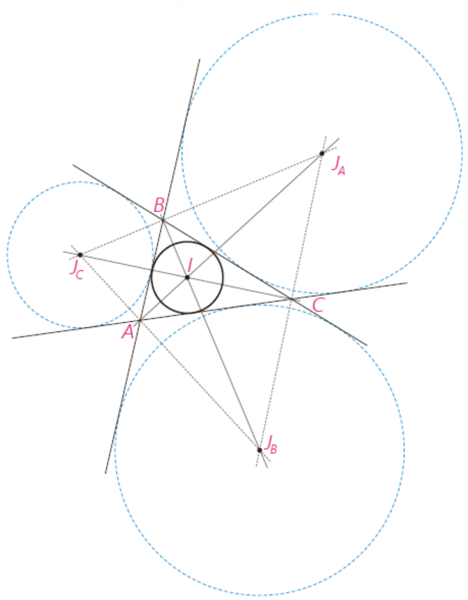
۱) ۶۰ ۲) ۳۰ ۳) ۹۰ ۴) ۴۵



دایره های محاطی خارجی مثلث:

تعریف : دایره ای که بر یک ضلع و امتداد دو ضلع دیگر مماس است، دایره محاطی خارجی مثلث نامیده می شود .

هر مثلث ۳ دایره محاطی خارجی دارد .



قضیه۸ : مرکز دایره محاطی خارجی مثلث ، نقطه همرسی دو نیمساز خارجی و یک نیمساز داخلی راس سوم آن است.

اثبات:

نتیجه : در صفحه هر مثلث ، همواره ۴ نقطه وجود دارد که از سه ضلع مثلث به یک فاصله اند .

(مرکز های دایره ی محاطی داخلی و دایره های خارجی مثلث .) (چرا؟)

شعاع های دایره های محاطی خارجی مثلث :

قضیه۹ : ثابت کنید در مثلث دلخواه ABC :

$$r_a = \frac{S}{P-a} \qquad r_b = \frac{S}{P-b} \qquad r_c = \frac{S}{P-c}$$

(در رابطه های بالا S مساحت مثلث ، P نصف محیط آن و r_a شعاع دایره محاطی خارجی مماس بر ضلع $BC = a$ و r_b شعاع دایره محاطی خارجی مماس بر ضلع $AC = b$ و r_c شعاع دایره محاطی خارجی مماس بر ضلع $AB = c$ می باشد.)

اثبات :

تمرین ۱۱ : اگر r_a و r_b و r_c شعاع های سه دایره محاطی خارجی مثلث ABC و r شعاع دایره محاطی داخلی این مثلث باشند، ثابت کنید :

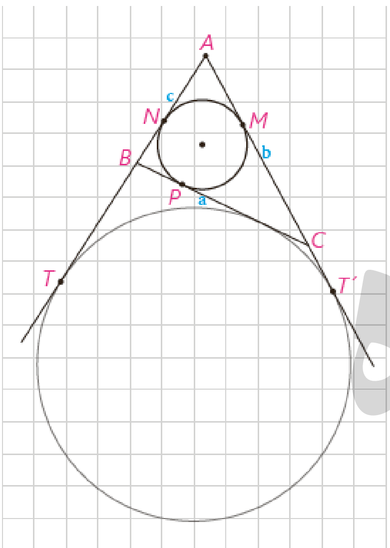
$$\frac{1}{h_a}+\frac{1}{h_b}+\frac{1}{h_c}=\frac{1}{r}$$

$$\frac{1}{r_a}+\frac{1}{r_b}+\frac{1}{r_c}=\frac{1}{r}$$

$$p^2 = r_a \times r_b + r_b \times r_c + r_c \times r_a$$

$$S^2 = r \times \boldsymbol{r_a} \times \boldsymbol{r_b} \times \boldsymbol{r_c}$$

تمرین۱۲ : نشان دهید در مثلث ABC داریم :



AM=AN=P−a

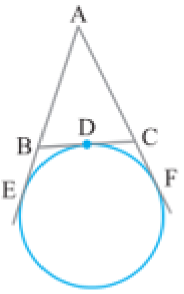
BN=BP=P−b

CM=CP=P-C

AT=AT′=P

مثال :

در شکل مقابل ، اگر ۹ $= AF$ باشد ، محیط مثلث ABC کدام است ؟



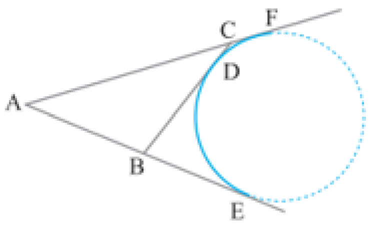
۱) ۹   ۲) ۱۸   ۳) ۲۷   ۴) ۳۰

در کدام مثلث ، الزاما دایره محاطی داخلی بر هر سه دایره محاطی خارجی مثلث مماس است؟

۱)قائم الزاویه   ۲) قائم الزاویه متساوی الساقین   ۳) متساوی الساقین   ۴) متساوی الاضلاع

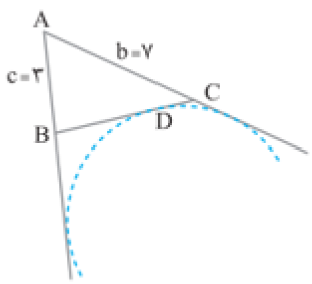
در شکل زیر با تغییر نقطه تماس D بر روی دایره بین دو نقطه ثابت E و F ، مساحت و محیط مثلث به ترتیب کدام وضع را دارند ؟

۱)متغیر –متغیر   ۲) ثابت – متغیر   ۳) ثابت – ثابت   ۴) ثابت – متغیر



در مثلثی به طول اضلاع ۷، ۵ و ۳ دایره محاطی خارجی به ضلع متوسط و امتداد دو ضلع دیگر مماس است . نقطه تماس ، ضلع متوسط را به کدام نسبت تقسیم می کند ؟

۱) $\frac{۱}{۹}$ ۲) $\frac{۱}{۶}$ ۳) $\frac{۱}{۵}$ ۴) $\frac{۲}{۹}$



چهارضلعی های محاطی و محیطی :

قضیه ۱۰ : یک چهارضلعی محاطی است اگر و فقط اگر دو زاویه مقابل آن مکمل باشند.

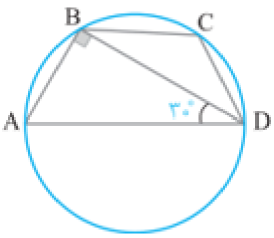
اثبات:

تمرین ۱۳: نشان دهید یک چهارضلعی محاطی است اگر و فقط اگر حاصل ضرب قطعه های یک قطر آن با حاصل ضرب قطعه های دیگر آن برابر باشد.

تمرین ۱۴: ثابت کنید شکل حاصل از تلاقی نیمسازهای داخلی ذوزنقه متساوی الساقین ، یک چهارضلعی محاطی است .

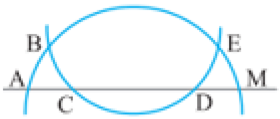
تمرین ۱۵: ثابت کنید یک ذوزنقه محاطی است اگر و تنها اگر متساوی الساقین باشد.

مثال :



در شکل مقابل $ABCD$ ذوزنقه است . اگر شعاع برابر ۸ باشد ، محیط ذوزنقه کدام است ؟

۱) ۵۰   ۲) ۴۰   ۳) ۲۴   ۴) ۳۴



در شکل مقابل دو دایره خط L را قطع کرده اند . اگر $\widehat{ABC} = ۷۰$ باشد ، زاویه DEM کدام است؟

۱) ۲۰   ۲) ۱۱۰   ۳) ۵۵   ۴) ۷۰

چهارضلعی محاطی $ABCD$ مفروض است . ضلع AB را از طرف B تا نقطه E امتداد می دهیم . اگر $\widehat{BAD} = ۹۰$ و $\widehat{ADC} = ۶۸$ باشد ، زاویه $\widehat{EBC}$ کدام است ؟

۱) °۶۶   ۲) °۶۸   ۳) °۷۰   ۴) °۸۸

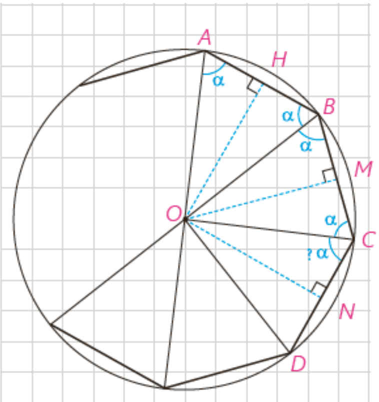
قضیه ۱۱ : چهارضلعی محیطی است اگر و تنها اگر مجموع اندازه های دو ضلع مقابل آن برابر با مجموع اندازه های دو ضلع مقابل دیگر باشد.

اثبات :

تمرین۱۶: یک ذوزنقه هم محاطی است هم محیطی .

ثابت کنید مساحت این ذوزنقه برابر است با " میانگین حسابی دو قاعده × میانگین هندسی دو قاعده "

قضیه ۱۲: ثابت کنید هر چند ضلعی منتظم ، هم محاطی است و هم محیطی .



اثبات:

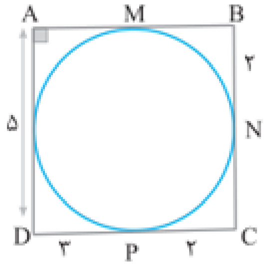
نتیجه : هر چند ضلعی منتظم قابل محیط شدن بر یک دایره و قابل محاط شدن در یک دایره دیگر است، که این دو دایره هم مرکز می باشند.(چرا؟)

◄ محاسبهٔ طول ضلع و مساحت یک n ضلعی منتظم محاط در دایره و محیط بر دایرهٔ دیگر

n ضلعی منتظم	اندازهٔ هر ضلع n ضلعی	مساحت n ضلعی منتظم
الف) اگر محاط در دایره‌ای به شعاع R باشد.	$۲R\sin\frac{۱۸۰^\circ}{n}$	$S_n = \frac{nR^۲}{۲}\cdot\sin\frac{۳۶۰^\circ}{n}$
ب) اگر محیط بر دایره‌ای به شعاع r باشد.	$۲r\tan\frac{۱۸۰^\circ}{n}$	$S'_n = nr^۲\cdot\tan\frac{۱۸۰^\circ}{n}$

تمرین۱۷ : ثابت کنید مساحت هر شش ضلعی منتظم محاط در یک دایره ، واسطه هندسی است بین مساحت های مثلث های متساوی الاضلاع محاطی و محیطی همان دایره.

مثال :



در چهارضلعی محیطی $ABCD$ مقابل ، شعاع دایره محاطی کدام است ؟

۱) ۶   ۲) ۳   ۳) ۵   ۴) ۲

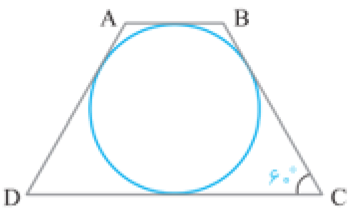
دو ضلع مجاور یک چهارضلعی محیطی با هم برابراند . برای این چهارضلعی کدام حکم درست است ؟

۱) قطر های آن با هم مساوی اند.   ۲) قطر های آن عمود منصف یکدیگر اند .

۳) قطر های آن بر هم عمود اند .   ۴) قطر های آن یکدیگر را نصف می کنند .

در لوزی با زاویه حاده α نسبت مساحت لوزی به مساحت دایره محاطی آن کدام است ؟

۱) $\dfrac{۲}{\pi \cos\frac{\alpha}{۲}}$ ۲) $\dfrac{۴}{\pi \sin\alpha}$ ۳) $\dfrac{۴}{\pi \cos\alpha}$ ۴) $\dfrac{۲}{\pi \sin\frac{\alpha}{۲}}$



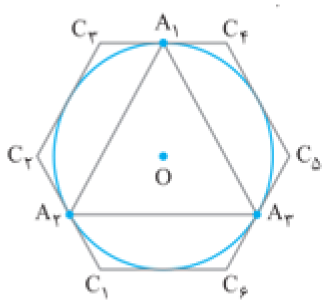
در شکل مقابل ، چهارضلعی $ABCD$ ذوزنقه متساوی الساقین است . اگر مساحت آن برابر $۳۲\sqrt{۳}$ باشد ، ساق این ذوزنقه کدام است ؟

۱) ۸   ۲) ۱۶   ۳) $۱۶\sqrt{۳}$ ۴) $\dfrac{۸\sqrt{۳}}{۳}$

مرکز یک دوازده ضلعی منتظم (نقطهO) را به دو راس مجاور A و B وصل کرده ایم . اگر طول پاره خط OB برابر ۲۰ باشد ، فاصله نقطه A از پاره خط OB کدام است ؟

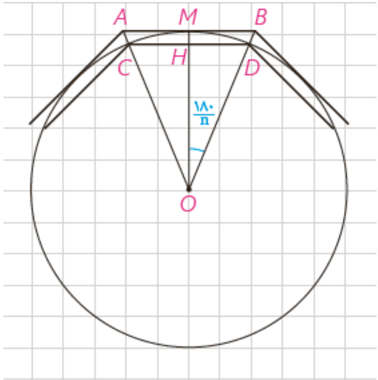
۱) ۱۰   ۲) ۲۰   ۳) $\frac{۵\sqrt{۳}}{۲}$ ۴) $\frac{۱۵\sqrt{۳}}{۲}$

در شکل مقابل مثلث و شش ضلعی زیر منتظم اند . اگر ضلع شش ضلعی منتظم برابر ۲ باشد ، ضلع مثلث چقدر است ؟



۱) $۴\sqrt{۳}$ ۲) $\sqrt{۳}$ ۳) $۸\sqrt{۳}$ ۴) ۳

مسائل بخش سوم از کتاب درسی:



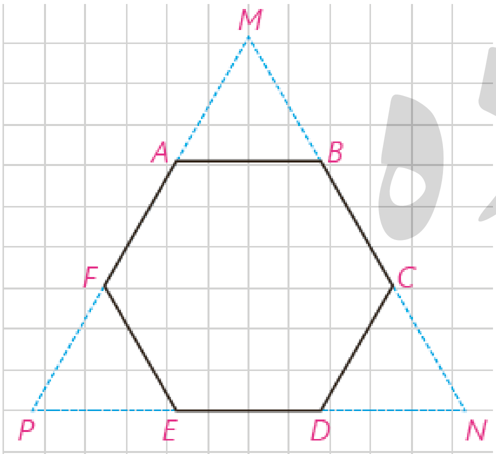
۱.یک دایره به شعاع r و n ضلعی های منتظم محاطی و محیطی در آن در نظر بگیرید .

نشان دهید اگر AB و CD اندازه های ضلع های nضلعی منتظم محیطی و محاطی باشد ،

آن گاه : $AB = ۲\, r \tan\frac{۱۸۰}{n}$ و $CD = ۲\, r\, sin\frac{۱۸۰}{n}$

۲. شش ضلعی منتظم $ABVDEF$ مفروض است . با امتداد دادن اضلاع شش ضلعی مطابق شکل ، مثلث MNP را ساخته ایم .

الف) نشان دهید MNP متساوی الاضلاع است .



ب) نشان دهید مساحت شش ضلعی ، دو سوم مساحت مثلث MNP است .

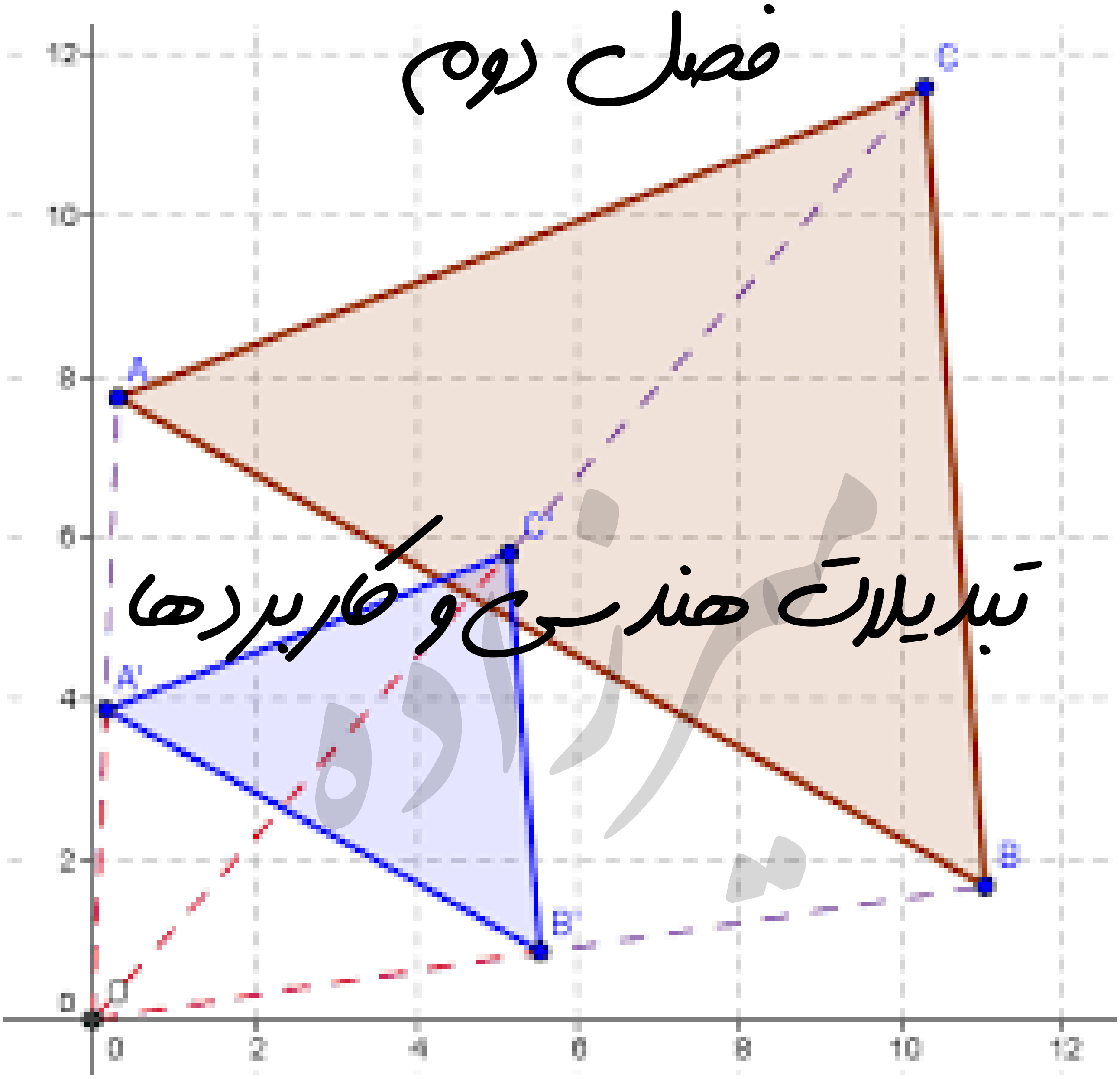
پ) از نقطه دلخواه T درون شش ضلعی عمود های TH ، 'TH و ''TH را به ترتیب بر BC ، ED و AF رسم کنید . با توجه به آنچه از هندسه پایه ۱ می دانید ، مجموع طول های این سه عمود با کدام جزء از مثلث MNP برابر است ؟

ت) مجموع مساحت های مثلث های TBC ، TDE و TAF چه کسری از مساحت مثلث MNP است ؟

نشان دهید : $S_{TBC} + S_{TDE} + S_{TAF} = S_{TAB} + S_{TEF} + S_{TCD}$

فصل دوم

تبدیلات هندسی و کاربردها



تبدیل هندسی :

تعریف: تبدیل T درصفحه P ، تابعی است که به هر نقطه A از صفحهP ، دقیقا یک نقطه مانند A' را از صفحهP نظیر می کند و بر عکس . هر نقطهA' از صفحهP تصویردقیقایک نقطهA از صفحهP است .

به عبارتی می توان نگاشت را اینگونه بیان کرد: تناظری که به هرعضو مجموعه ی P یک و تنها یک عضو از مجموعه Pرا نظیر می کند .

اگر تبدیل را با حرف T نمایش دهیم به اختصار چنین می نویسیم :

$$T: P \to P$$

$$T(A) = A$$

تبدیل می توانند موقعیت ، اندازه پاره خط ها و یا شکل را تغییر دهند ، به تبدیل یافته شکل اولیه ،تصویر آن شکل می گویند.

تبدیل طول پا (حافظ طول یا ایزومتر) : تبدیل هایی که طول پاره خط را حفظ می کنند ، تبدیلات طولپا (ایزومتری) نامیده می شوند.

به عبارتی اگر داشته باشیم : $T(A) = A'$. $T(B) = B'$ ، آنگاه داریم : $AB = A'B'$.

به همین ترتیب اگر تبدیلی شیب خطوط را حفظ کند نیز به آن تبدیل ، حافظ شیب می گوییم .

تبدیل همانی : I را تبدیل همانی گوییم ، هرگاه به ازای هر نقطه A از صفحه P داشته باشیم : $I(A) = A$.

نقطه ثابت تبدیل : در هر تبدیلی ، نقطه ای را که تبدیل یافته ی آن روی خودش بیفتد ، نقطه ثابت تبدیل می گوییم .

با توجه به تعاریف بالا قضایای زیر به سادگی اثبات می شوند .

قضیه ۱ : در هر تبدیل ایزومتری ، تبدیل یافته هر خط راست ، خطی راست می باشد .

اثبات :

قضیه۲ : در هر تبدیل ایزومتری ، تبدیل یافته هر زاویه ، زاویه ای هم اندازه با آن می باشد.

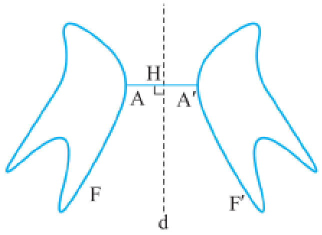
اثبات :

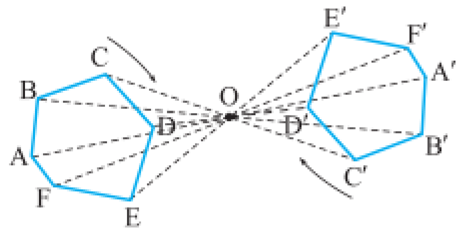
نتیجه : اگر تبدیلی ایزو متری باشد ، خط های d و l بر هم عمودند اگر و فقط اگر تصویر آنها یعنی d' و l' بر هم عمود باشند.(چرا ؟)

نتیجه : همانطور که ثابت کردیم ایزومتری ها ، اندازه زاویه و اندازه پاره خط ها را حفظ می کنند، بنابراین می توان گفت به طور کلی هر چند ضلعی و تصویرش تحت تاثیر تبدیلی ایزومتری باید با هم هم نهشت باشند .

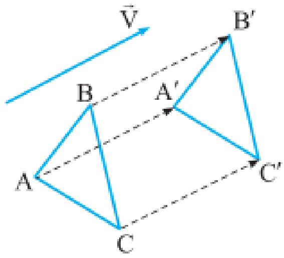
در سال های قبل تبدیلات زیر را بصورت شهودی بررسی کردیم ، که در زیر یادآور می شویم . اما در ادامه در این فصل می خواهیم به اثبات دقیق ویژگی های آنها بپردازیم .

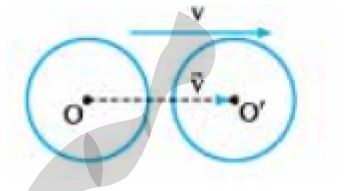
۱-بازتاب: (نسبت به یک نقطه (مرکزی) – نسبت به یک خط (محوری))



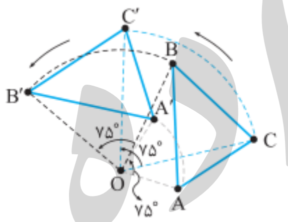


۲-انتقال: (به کمک بردارهای انتقال اشکال را در ۴جهت اصلی در صفحه جابه جا می کنیم .)

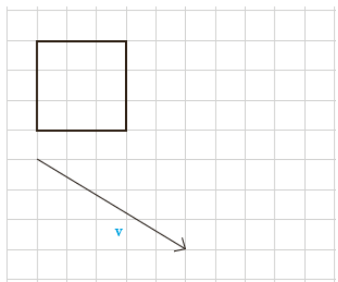


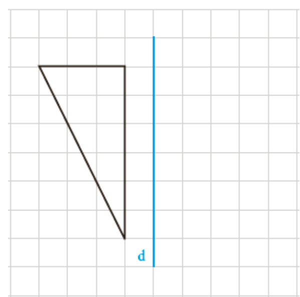


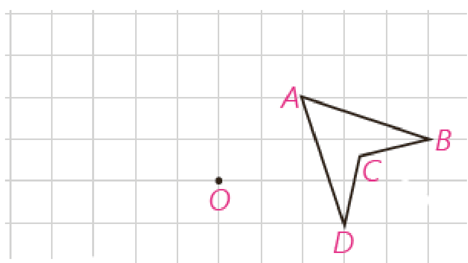
۳-دوران: (چه اندازه ؟ نسبت به کجا ؟ در چه جهتی ؟)



تمرین ۱: روی هر شکل تبدیل خواسته شده را انجام دهید.





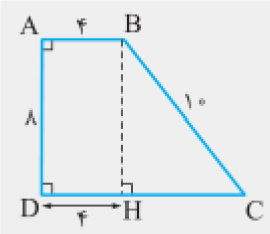


(دوران ۹۰ نسبت به نقطه O در جهت خلاف عقربه های ساعت)

***همانطور که می دانیم ، دوران حول نقطه ای به اندازه ۱۸۰ ، همان بازتاب مرکزی نسبت به نقطه O می باشد .**

نتیجه: بطور شهودی دیدیم که بازتاب ، انتقال و دوران می توانند موقعیت شکل را تغییر دهند اما اندازه پاره خط ها و زاویه ها را تغییری نمی دهند.

مثال ۱.اگر T تبدیلی طولپا باشد و ذوزنقه $ABCD$ تحت این تبدیل روی چهارضلعی $A'B'C'D'$تصویر شود ، چنان چه $AB \parallel CD$ ، $AD \perp CD$ $AB = ۴$ ، $BC = ۱۰$ و $AD = ۸$ باشد، محیط چهارضلعی $A'B'C'D'$ را بدست آورید.



مثال های بیشتر:

خطوط a و b یکدیگر را با زاویهٔ α قطع کرده‌اند. تحت تبدیل طولپای یکسان خطوط a و b به خطوط a′ و b′ تبدیل شده‌اند. خطوط a′ و b′ با یکدیگر کدام زاویه را می‌سازند؟

۱) ۰° ۲) ۱۸۰° ۳) α ۴) $\alpha + ۱۸۰^\circ$

. تحت تبدیلی طولپا، $\overset{\triangle}{ABC}$ به $\overset{\triangle}{MNK}$ تبدیل شده است. اگر $\hat{A} = \hat{N}$ ، $\hat{B} = ۷۰^\circ$ و $\hat{M} = ۲۰^\circ$ باشند، زوایای N و K کدام اختلاف را با هم دارند؟

۱) ۲۰° ۲) ۹۰° ۳) ۵۰° ۴) صفر

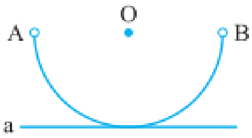
. تحت تبدیلی طولپا، $\overset{\triangle}{MNK}$ به $\overset{\triangle}{ABC}$ تبدیل شده است. اگر در $\overset{\triangle}{ABC}$ ، $AB = BC$ و $M\hat{N}K = ۱۰۰^\circ$ باشد، کوچک‌ترین زاویهٔ $\overset{\triangle}{ABC}$ از بزرگ‌ترین زاویهٔ $\overset{\triangle}{MNK}$ چقدر کمتر است؟

۱) ۸۰° ۲) ۴۰° ۳) ۶۰° ۴) ۱۰۰°

زاویهٔ $M\hat{O}N$ مفروض است. هر یک از نقاط X که روی OM قرار دارد، در نقطهٔ X_1 روی ON قرار داده می‌شود. به طوری که XX_1 بر نیمساز زاویهٔ $M\hat{O}N$ عمود باشد (نقطهٔ O روی خودش نگاشته می‌شود) در صورت تبدیل بودن این عمل، کدام تبدیل اتفاق افتاده است؟

۱) تبدیل نیست ۲) انتقال ۳) دوران ۴) بازتاب

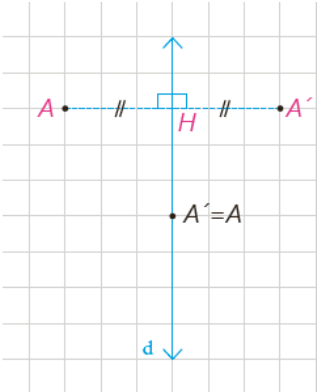
در شکل زیر، نیم‌دایرهٔ AB به مرکز O و خط a مماس بر آن مفروض است. کدام تبدیل می‌تواند نیم‌دایرهٔ AB را روی خط a تصویر کند؟



۱) انتقال ۲) دوران
۳) بازتاب ۴) هیچ‌کدام

بررسی دقیق تبدیلات هندسی پرکاربرد:

۱.بازتاب: همانطور که در سال های قبل دیدیم شکل را می توانیم نسبت به یک نقطه (بازتاب مرکزی) یا نسبت به خطی داده شده (بازتاب محوری) بازتاب دهیم و تصویر جدید را بدست آوریم. در این بخش ویژگی بازتاب محوری را بررسی می کنیم .



تعریف : بازتاب محوری : بازتاب نقطه A نسبت به خط ثابت d ، نقطه ای مانند A' است بطوری که خط d عمودمنصف پاره خط AA' باشد .

d را خط یا محور بازتاب می گوییم و بصورت زیر نمایش می دهیم :

$S_d(A) = A'$ **(بازتاب نقطه A نسبت به خط d نقطه A' می باشد)**

می دانیم که اگر نقطه ای روی محور بازتاب باشد ، بازتاب آن بر خودش منطبق می شود .

یعنی اگر $A \epsilon d$ آنگاه $S_d(A) = A$ که طبق تعاریف قبل چنین نقاطی را نقاط ثابت در بازتاب می نامیم و در نتیجه می توان گفت بازتاب محوری بی شمار نقطه ثابت دارد.

قضیه ۳: ثابت کنید بازتاب تبدیلی ایزومتر (حافظ طول – طولپا) است.

سوال ؟؟ آیا بازتاب شیب را حفظ می کند ؟؟

در دو حالت زیر به سوال بالا پاسخ دهید :

۱)خط با محور بازتاب موازی باشد .

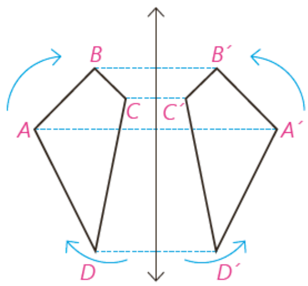
۲) خط با محور بازتاب موازی نباشد .

نتیجه : بازتاب در حالت کلی شیب خط را حفظ نمی کند . مگر آنکه پاره خط موازی یا عمود بر محور بازتاب باشد. بنابر این :

هر خط و بازتاب آن نسبت به یک محور ، یا با آن محور همرس اند و با محور زاویه ای برابر می سازند و یا اینکه موازی محور بازتاب هستند و به فاصله ای برابر از آن قرار دارند .

سوال؟؟؟ در شکل زیر چهارضلعی $A'B'C'D'$ تصویر چهارضلعی محدب $ABCD$ تحت بازتاب است . در شکل اولیه وقتی به ترتیب از A به B ، C و D می رویم ، جهت حرکت موافق عقربه های ساعت است . جهت حرکت در بازتاب این نقاط چگونه است؟

آیا می توان گفت ، بازتاب جهت شکل را حفظ می کند ؟



تذکر :

***وقتی A' بازتاب A نسبت به خط d است ، بازتاب A' نسبت به خط d کدام نقطه است ؟ .... چرا ؟**

***قرینه قرینه هر نقطه .... است .**

نتیجه : در واقع و به زبان ساده تر می توان گفت ، که ترکیب هر بازتاب با خودش یک تبدیل همانی است .

مثال۲.در حالتی که پاره خط AB در راستای عمود بر خط بازتاب قرار دارد ، ثابت کنید که اگر $A'B'$ بازتاب AB باشد ، AB و $A'B'$ هم اندازه اند.

مثال۳.خط d و دو نقطه A و Bدریک صفحه واقع اند و نقاط B و A در یک طرف خط d هستند. فاصله دو نقطه B و A از خط d ، به ترتیب ۴ و ۲ و امتداد AB با خط d زاویه ۳۰ درجه می سازد . اگر بازتاب این دو نقطه نسبت به خط d ، نقطه های A' و B' باشند ، طول AB' چقدر است ؟

مثال۴. اگر در دستگاه محورهای مختصات ، بازتاب نقطه $A(۲.۵)$ نسبت به خط d ، نقطه $A'(-۱.۲)$ باشد .کدام نقطه زیر روی خط d قرار دارد؟

۱) (۱,۳)   ۲) (۱,۴)   ۳) (۰,۵)   ۴) (۲,۵)

مثال۵. پاره خط AB به طول ۶ سانتی متر خط L را با زاویه ۴۵ درجه قطع می کند . اگر $\mathrm{A'B'}$ بازتاب AB نسبت به خط L باشد ، مساحت چهارضلعی $\mathrm{AA'BB'}$ چقدر است ؟

مثال ۶: پاره خط AB به طول ۴ خط L را قطع نکرده و فاصله A از خط برابر ۲ است . 'A'B را بازتاب AB نسبت به L می نامیم . اگر امتداد AB با خط 'A'B زاویه ۶۰ درجه بسازد ، مساحت چهارضلعی $ABB'A'$ چقدر است ؟

مثال های بیشتر:

نقطهٔ M داخل $A\hat{O}B = ۴۵^\circ$ ، مفروض است. اگر نقاط M_1 و M_2 بازتاب نقطهٔ M نسبت به اضلاع زاویه باشند، زاویهٔ $M_1\hat{O}M_2$ کدام است؟

۱) $۲۲/۵^\circ$ ۲) ۱۸۰° ۳) ۴۵° ۴) ۹۰°

در مثلث ABC ، رأس B بازتاب نقطهٔ K نسبت به نیمساز داخلی زاویهٔ A است. اگر $AB = ۳$ و $AC = ۵$ باشد، اندازهٔ پاره‌خط CK کدام است؟

۱) ۴ ۲) ۲ ۳) ۸ ۴) ۱

دایره‌ای به مرکز O بازتاب محوری دایره‌ای به مرکز O' نسبت به خط a است. شعاع دایره به مرکز O برابر ۳ و فاصلهٔ مرکز O' تا خط a برابر ۵ است. فاصلهٔ بین دو دایره کدام است؟

۱) ۴ ۲) ۲ ۳) ۱ ۴) ۸

چندضلعی واقع‌شده بین ذوزنقهٔ متساوی‌الساقین و بازتاب آن نسبت به خطی که اوساط ساقهای ذوزنقه را به هم وصل می‌کند، کدام است؟

۱) ذوزنقه ۲) شش‌ضلعی ۳) مثلث ۴) چهارضلعی

در چهارضلعی MPAK ، مثلث MPK متساوی‌الاضلاع است. اگر نقطهٔ A بازتاب نقطهٔ M نسبت به PK باشد، چهارضلعی MPAK کدام است؟

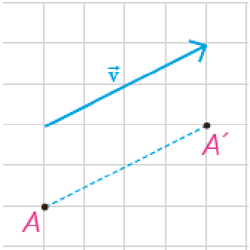
۱) مستطیل ۲) مربع ۳) لوزی ۴) متوازی‌الاضلاع

مثلث قائم‌الزاویهٔ متساوی‌الساقین ABC مفروض است. در بازتاب مثلث مفروض نسبت به خطی که شامل وتر AC است، رأس B به نقطهٔ B_1 منتقل می‌شود. اگر وتر مثلث ۷ باشد، طول پاره‌خط BB_1 کدام است؟

۱) $۳/۵$ ۲) ۷ ۳) ۱۴ ۴) $\sqrt{\frac{۷}{۲}}$

۲-انتقال :

همانطور که در سال های قبل دیدیم ، اگر بردار ثابت $\vec{V}$ داده شده باشد ، و از نقطه A برداری مساوی با بردار $\vec{V}$ رسم کنیم ، بعبارت دیگر از نقطه A با بردار $\vec{V}$ حرکت کنیم تا نقطه جدید A' بدست آید ، آنگاه A' را انتقال یافته نقطه A تحت بردار $\vec{V}$ می نامیم .



پس می توان گفت :

تعریف : انتقال یافته نقطه A تحت بردار $\vec{V}$، نقطه ای مانند A' است که $\overrightarrow{AA'} = \vec{V}$ و می نویسیم :

$T_{\vec{V}}(A) = A'$ (A' انتقال یافته ی A تحت بردار $\overrightarrow{V}$ است)

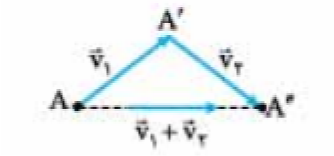
قضیه۴: ثابت کنید انتقال تبدیلی ایزومتر است .

نتیجه : انتقال تبدیلی ایزونتر است و برای هر دو نقطه A و B از صفحه P که $T(B) = B'$ و $T(A) = A'$ داریم : $\mathrm{AB} = \mathrm{A'B}$

قضیه۵: ثابت کنید انتقال حافظ شیب است .

مثال ۷: اگر A' انتقال یافته نقطه A تحت بردار $\vec{V}$ و A''نیز انتقال یافته A'تحت بردار$\vec{u}$ باشد ، آنگاه تبدیلی معرفی کنید که A را مستقیما روی A'' تصویر کند .

نتیجه : ترکیب چند انتقال ، انتقالی است که بردار نظیر آن ، مجموع بردارهای نظیر هر یک از انتقال ها می باشد .



مثال۸ .مثلث ABC را که در آن $AB = 10$، $AC = 24$ و $BC = 26$ است تحت برداری که طول آن ۷ است ، انتقال داده ایم و تصویرش مثلث $A'B'C'$ شده است . مساحت $A'B'C'$ را بدست آورید .

مثال ۹. سه خط دوبه دو غیر موازی L و L' و L'' در صفحه مفروض اند . پاره خطی به طول ۵ سانتی متر رسم کنید که دو سر آن روی L و L' و موازی L'' باشد .

مثال ۱۰.خط D را با بردار به طول $3\sqrt{2}$ که با آن زاویه ۷۵ می سازد ، انتقال می دهیم خط D' به دست می آید. D' را در انتقال با بردار به طول $3\sqrt{6}$ که با D' زاویه ۱۵ می سازد ، تصویر می کنیم. خط D'' به دست می آید . اگر D' بین D و D'' باشد آن گاه فاصله D و D'' کدام است ؟

مثال های بیشتر:

. متوازی‌الاضلاع ABCD مفروض است. تحت انتقال به اندازه و جهت بردار $\overrightarrow{AD}$ نقطهٔ B به‌کدام نقطه تبدیل می‌شود؟

۱) A ۲) C

۳) D ۴) نقطه‌ای خارج متوازی‌الاضلاع ABCD

. لوزی ABCD با زاویهٔ حادهٔ $\hat{A} = ۶۰^\circ$ مفروض است. انتقال‌یافتهٔ این لوزی تحت بردار $|\overrightarrow{CA}| = ۲$ را $A'B'C'D'$ می‌نامیم. محیط چهارضلعی $A'B'C'D'$ کدام است؟

۱) ۴ ۲) $۸\sqrt{۳}$ ۳) ۸ ۴) $\frac{۸\sqrt{۳}}{۳}$

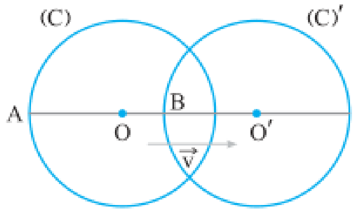
. در مثلث متساوی‌الساقین $\overset{\triangle}{ABC}$ به قاعدهٔ AC ، میانهٔ BD رسم شده است. تحت انتقالی رأس A به نقطهٔ D و مثلث $\overset{\triangle}{ABC}$ به مثلث $\overset{\triangle}{DB'C'}$ تبدیل شده است. اگر ساق مثلث $\overset{\triangle}{ABC}$ برابر ۵ و قاعدهٔ آن برابر ۸ باشد، محیط چهار ضلعی $ABB'D$ کدام است؟

۱) ۲۸ ۲) ۸ ۳) ۱۸ ۴) ۲۱

. دایرهٔ $C(O,R)$ را طوری انتقال داده‌ایم که دایرهٔ انتقال یافته با آن در نقطهٔ K مماس است. نقاط A و B به‌ترتیب روی دایرهٔ C و روی دایرهٔ انتقال‌یافتهٔ مفروض هستند. اگر $A\hat{K}B = ۹۰^\circ$ باشد، AB کدام است؟ $(AK = BK)$

۱) ۴R ۲) ۲R ۳) R ۴) $\frac{\sqrt{۳}R}{۲}$

. در شکل مقابل دایرهٔ $C'(O',R)$ انتقال‌یافتهٔ دایرهٔ $C(O,R)$ است. مقدار $AB^۲ + MN^۲$ کدام است؟



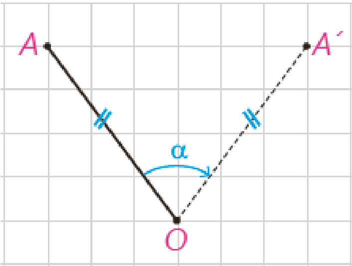
۱) $R^۲$ ۲) $۴R^۲$

۳) $\frac{۹}{۴}R^۲$ ۴) $\frac{R^۲}{۴}$

۳.دوران در صفحه

همان طور که از قبل می دانیم ، برای دوران دادن شکل به مرکز دوران O و اندازه زاویه α ، هر نقطه از شکل مثل A را به مرکز دوران یعنی O وصل می کنیم .سپس در جهت خواسته شده به کمک OA زاویه ای برابر با α رسم کرده و روی ضلع دیگر این زاویه ، پاره خطی به اندازه OA جدا می کنیم تا A' بدست آید .

تعریف : اگر O نقطه ثابت در صفحه P و α زاویه معین و جهت دار باشد ، دوران یافته نقطه A واقع در صفحه P نقطه ای مانند A' است بطوری که هر دو شرط زیر را داشته باشیم :



۱) $OA = OA'$ ۲) $A O \widehat{A'} = \alpha$

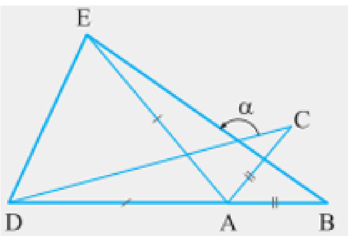
و می نویسیم :

(A' دوران یافته ی نقطه A حول نقطه ی O به اندازه α) $R_O^{\alpha}(A) = A'$

قضیه ۶: ثابت کنید دوران تبدیلی ایزومتر است .

نتیجه : دوران تبدیلی ایزومتر است و برای هر دو نقطه A و B از صفحه P که $R(A) = A'$ و $R(B) = B'$ باشد ،داریم : $AB = A'B'$

مثال ۱۱.. در شکل زیر $\widehat{AED} = ۶۵$. $\widehat{CAB} = ۵۰$. $AD = AE$. $AC = AB$ است . زاویه α چند درجه است ؟



مثال۱۲.دو خط D و D' مفروض اند. چند نقطه وجود دارد که اگر D را حول آن نقطه دوران دهیم بر D' منطبق گردد؟

تمرین۲: دو پاره خط AB و $\mathrm{A'B'}$ با طول برابر در یک صفحه داده شده است . اگر $\mathrm{A'B'}$ دوران یافته AB در یک دوران باشد و AA' و $\mathrm{BB'}$ نا موازی باشند ، مرکز دوران را پیدا کرده و زاویه دوران را مشخص کنید .

تمرین۳. دو خط D و L و نقطه A در یک صفحه داده شده اند ، مثلث متساوی الساقین قائم الزاویه ای به راس A را چنان رسم کنید که راس های B و C به ترتیب روی خط های Dو L باشد .

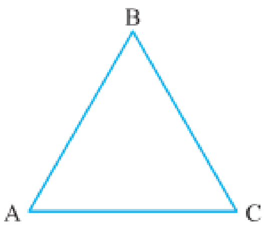
تذکر مهم : دوران حول نقطه O به اندازه ۱۸۰ همان بازتاب نسبت به نقطه O است و در ای حالت تبدیلی حافظ شیب است . گاهی این دوران را تبدیل نیم دور حول نقطه O نیز می نامند . چنین تبدیلی حافظ طول ، حافظ شیب است .

* ترکیب دو دوران هم مرکز ، دورانی با همان مرکز و با زاویه ای مساوی مجموع زاویه های آن ها می باشد ، به بیان دیگر :

$$R_o^{\beta} O R_o^{\alpha} = R_o^{\alpha+\beta}$$

مثال تستی :

. مثلث متساوی‌الاضلاع ABC مفروض است. اگر این مثلث را حول نقطهٔ C و به اندازهٔ ۶۰° (در جهت حرکت عقربه‌های ساعت) دوران دهیم، کدام گزینه صحیح است؟



۱) رأس A به رأس B منتقل می‌شود.
۲)رأس B به رأس A منتقل می‌شود.
۳) رأس C به رأس A منتقل می‌شود.
۴) رأس C به رأس B منتقل می‌شود.

. در دورانی حول نقطهٔ O به اندازهٔ زاویهٔ α،نقطهٔ M به نقطهٔ K و نقطهٔ N به نقطهٔ P منتقل می‌شود. کدام گزینه صحیح است؟

۱) $PN = KM$
۲) $OP = OM$
۳) $P\hat{O}M = N\hat{O}K$
۴) $P\hat{O}N = K\hat{O}M$

. زاویهٔ $A\hat{B}C$ برابر α $(\alpha < ۹۰^\circ)$ تحت دورانی ۶۰° در جهت A به C، حول B به زاویهٔ $A_1\hat{B}C_1$ تبدیل می‌شود. زاویهٔ $A\hat{B}C_1$ کدام است؟

۱) $۲\alpha^\circ + ۱۲۰^\circ$
۲) $۶۰^\circ - \alpha^\circ$
۳) $\alpha^\circ + ۶۰^\circ$
۴) $\alpha^\circ - ۶۰^\circ$

. مثلث متساوی‌الاضلاع ABC مفروض است. تحت دورانی به اندازهٔ ۱۸۰° نسبت به وسط یکی از اضلاع، رأس A به A_1 و رأس B به B_1 و رأس C به C_1 منتقل می‌شود. اگر ضلع مثلث ABC برابر ۱۲ باشد، طول پاره‌خط CC_1 کدام است؟

۱) ۱۰
۲) ۱۲
۳) ۶
۴) ۲۴

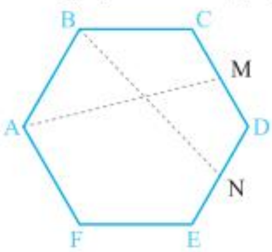
. مربع $ABCD$ تحت دورانی حول نقطهٔ A طوری تبدیل شده که رأس B از این مربع به رأس D و رأس C از آن به C_1 منتقل شده است. اگر $AB = d$ باشد، CC_1 کدام است؟

۱) $\frac{d}{۴}$
۲) $\frac{d}{۲}$
۳) $۲d$
۴) d

. دو مثلث متساوی‌الساقین $\overset{\triangle}{AKM}$ و $\overset{\triangle}{CKM}$ می‌توانند دوران یافتهٔ یکدیگر حول نقطهٔ K به اندازهٔ ۶۰° باشند. اگر طول ضلع مشترک آن‌ها برابر ۱۲ باشد، مجموع مساحت‌های آن‌ها کدام است؟

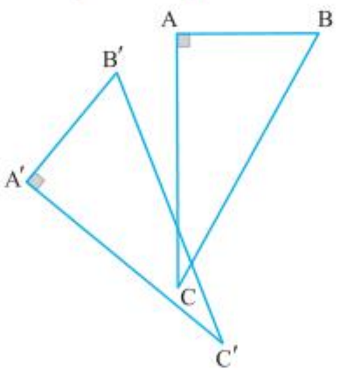
۱) $۱۸\sqrt{۳}$
۲) $۳۶\sqrt{۳}$
۳) $۷۲\sqrt{۳}$
۴) $۱۲\sqrt{۳}$

. در شکل مقابل پاره‌خط AM از شش‌ضلعی منتظم $ABCDEF$ تحت دورانی حول نقطهٔ مرکز شش‌ضلعی به پاره‌خط BN تبدیل شده است. اگر M و N وسط ضلع‌ها باشند، زاویهٔ این دوران کدام است؟



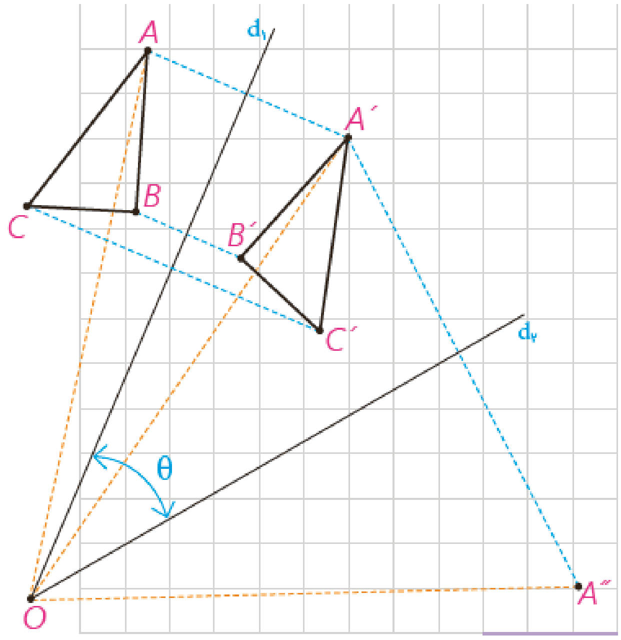
۱) ۶۰°
۲) ۱۲۰°
۳) ۳۰°
۴) ۴۵°

در شکل زیر دو مثلث دوران یافتهٔ یکدیگرند. مرکز دوران کجا قرار دارد؟



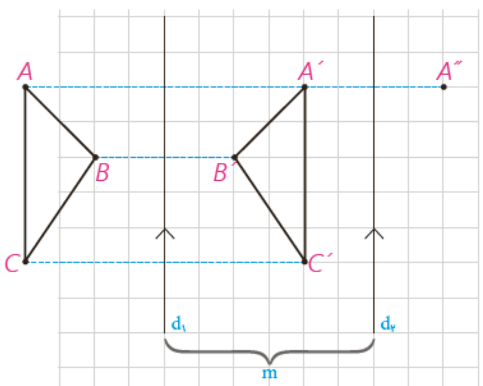
۱) خارج هر دو مثلث
۲) داخل هر دو مثلث
۳) فقط داخل مثلث ABC
۴) فقط داخل مثلث $A'B'C'$

چند مثال مهم :



- در شکل ، دو خط d_1 و d_2 با زاویه θ یکدیگر را قطع کرده اند .
مثلث $A'B'C'$ بازتاب مثلث ABC نسبت به خط d_1 است .
بازتاب مثلث $A'B'C'$ را نسبت به خط d_2 رسم کنید و آن را $A''B''C''$ بنامید .
الف) نشان دهید : $\widehat{AOA''} = ۲\theta$
ب) اندازه $\widehat{COC''}$ و $\widehat{BOB''}$ چقدر است ؟
پ) با چه تبدیلی می توان مثلث $A''B''C''$ را تصویر مثلث ABC دانست ؟ چه نتیجه ای می گیرید ؟

*در شکل زیر ، d_1 به موازات d_2 و به فاصله m از آن قرار دارد و مثلث $A'B'C'$ بازتاب مثلث ABC نسبت به خط d_1 است . بازتاب مثلث $A'B'C'$ را نسبت به خط d_2 رسم کنید و آنرا $A''B''C''$ بنامید .



الف) نشان دهید : $AA'' = ۲m$

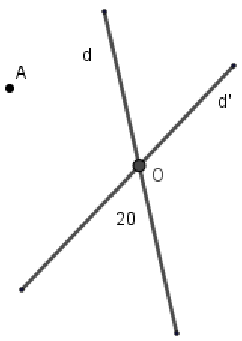
ب) اندازه BB'' و CC'' چقدر است ؟

پ) با چه تبدیلی می توان مثلث $A''B''C''$ را تصویر مثلث ABC دانست ؟

چه نتیجه ای می گیرید؟

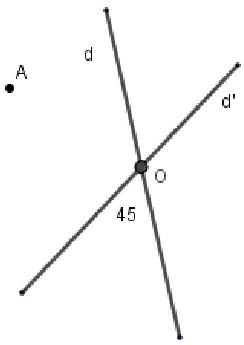
*نقطه A به فاصله $۲\sqrt{۶}$ از خط d قرار دارد . تصویر این نقطه را تحت بازتاب به خط d نقطه A' می نامیم . نقطه A را حول نقطه A' به اندازه ۱۲۰ درجه دوران می دهیم تا نقطه A'' حاصل شود . طول پاره خط AA'' را محاسبه کنید .

*نقطه A' تصویر نقطه A در بازتاب نسبت به خط L است . اگر $AA' = ۱۶$ و نقطه O روی خط L و $OA = ۱۰$ باشد ، فاصله نقطه A از خط OA' چقدر است ؟



*در شکل مقابل بازتاب نقطه A نسبت به خط d را A' و بازتاب A' نسبت به خط d' را A'' می نامیم . اندازه زاویه $\widehat{AOA''}$ چقدر است ؟

*در شکل مقابل فاصله نقطه A از محل تلاقی دو خط d' و d برابر ۴ است . A را یکبار نسبت به خط d و سپس نقطه حاصل را نسبت به خط d' بازتاب می دهیم . فاصله نقطه A از تصویر نهایی چقدر است ؟

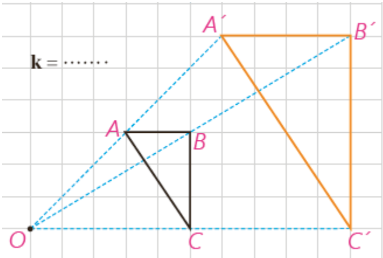


تجانس :

تبدیل های طول پا را در بخش های قبلی بررسی کردیم . در هندسه اقلیدسی ، تبدیل هایی وجود دارند که شیب و اندازه زاویه ها و هم خطی را حفظ می کنند ولی در حالت کلی طول پا نیستند.

برای مثال در تشابه مثلث ها مشاهده کردیم که وقتی دو مثلث متشابه اند ، اندازه زاویه ها ثابت می مانند اما اندازه ضلع ها ممکن است ثابت نمانند در عوض، نسبت اندازه اضلاع متناظر ثابت می مانند .

اکنون می خواهیم تبدیلی را معرفی کنیم که حالت خاصی از تشابه است و نسبت اضلاع را ثابت نگه می دارد . این تبدیل تجانس نام دارد .



تعریف :

اگر O نقطه ای ثابت در صفحه و $k \neq ۰$ یک عدد حقیقی باشد ، نقطه M' را مجانس نقطه M در تجانس به مرکز O و نسبت تجانس k گوییم ، هرگاه سه شرط زیر برقرار باشد :

الف) سه نقطه O ، M و M' روی یک خط راست باشند .

ب) $OM' = |k| \cdot OM$

پ) اگر $k > ۰$ باشد ، M' روی نیم خط OM و M' در یک طرف نقطه O قرار دارند .(تجانس مستقیم)

اگر $k > ۰$ تجانس مستقیم نامیده می‌شود.

اگر $k < ۰$ منفی باشد ، نقطه O بین نقاط M و M' قرار می گیرد . (تجانس معکوس)

اگر $k < ۰$ تجانس معکوس نامیده می‌شود.

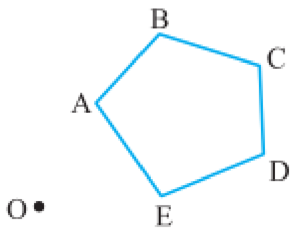
در این صورت هرگاه M' مجانس M نسبت به نقطه O و با نسبت k باشد ، می نویسیم : $M' = D_O^k\,(M)$

- اگر در یک تجانس، نسبت تجانس بزرگتر از یک ($k > ۱$)یا کوچکتر از ۱- باشد ($k < -۱$) ، تجانس را انبساطی می گوییم . در این حالت تصویر نقطه ، از مرکز تجانس دور می شود .
- اگر در یک تجانس ، نسبت تجانس بین ۱ و ۱- باشد ($-۱ < k < ۱$ ، $k \neq ۱$) ، در این صورت تجانس را انقباضی می گویند . در این حالت تصویر نقطه ، به مرکز تجانس نزدیک می شود .
- اگر $k = ۱$ باشد ، آنگاه یک تبدیل همانی خواهیم داشت . و اگر $k = -۱$ باشد ، آن را تجانس نیم دور یا بازتاب مرکزی می نامیم .

پس بنابراین اگر $|k| = ۱$ تبدیل طول پاست .

- اگر M' مجانس M نسبت به مرکز تجانس O و با نسبت k باشد ، آنگاه M نیز مجانس M' است نسبت به مرکز تجانس O و با نسبت $\frac{۱}{k}$
- در تجانس ، یک شکل متشابه با شکل اولیه با نسبت تشابه k بدست می آید.
- *ترکیب دو تجانس با مرکز های یکسان ، تجانسی است با همان مرکز و نسبت تجانس برابر ضرب نسبت تجانس های مفروض .
- $H_O^{k'}\,o H_O^{k}(M) = H_O^{kk'}$
- * ترکیب یک تجانس و یک انتقال همواره یک تجانس است که نسبت آن همان نسبت تجانس مفروض است .

مثال۱۳ : در شکل مقابل پنج ضلعی $ABCDE$ و نقطه O داده شده اند :



الف) مجانس پنج ضلعی را در تجانسی به مرکز O و با نسبت $\frac{۱}{۲}$ رسم کنید .

ب) مجانس پنج ضلعی را در تجانسی به مرکز O و با نسبت ۲رسم کنید .

پ) آیا این دو تجانس طولپا هستند ؟ شیب پا چطور ؟ آیا جهت شکل حفظ شده است ؟

خواص تجانس:

۱.با توجه به تعریف تجانس، بدیهی است که تجانس تبدیلی طولپا نیست مگر آنکه $|k| = ۱$.

۲. تجانس جهت شکل را حفظ می کند .(چرا ؟)

۲. در تجانس غیر همانی فقط یک نقطه ثابت داریم که همان مرکز تجانس است .

قضیه ۶: ثابت کنید تجانس شیب را و در نتیجه زاویه را حفظ می کند .

مثال۱۴ : آیا میتوان دو پاره خط AB و $A'B'$ در یک صفحه را تصویر یکدیگر در یک تجانس دانست ؟ در چه صورت امکان پذیر است ؟

مثال۱۵ : به کمک تجانس ثابت کنید وسط قاعده های یک ذوزنقه ، نقطه تلاقی قطرهای آن و نقطه تلاقی امتداد ساق های آن روی یک خط قرار دارند .

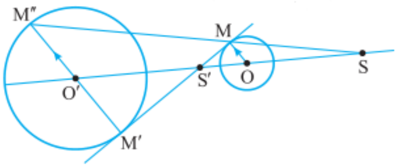
تصویر یک دایره در یک تجانس :

قضیه ۷: ثابت کنید تصویر هر دایره در یک تجانس یک دایره است .

قضیه ۸: ثابت کنید هر دو دایره با شعاع های مختلف در صفحه ، تصویر هم در دو تجانس مستقیم و معکوس می باشند .

نکته: بطور کلی برای پیدا کردن مرکز های دو دایره یک شعاع در یکی از آنها را با قطر موازی آن در دیگری در نظر می گیریم . انتهای پاره خط ها را به هم وصل می کنیم ، محل تلاقی خط های ایجاد شده با خط المرکزین ، مراکز تجانس دایره هاست .

در دو دایره متخارج S و S' همان نقطه های همرسی مماس مشترک های خارجی و داخلی با خط المرکزین دو دایره است.



مثال۱۶ : با رسم دو دایره با شعاع های مختلف مراکز تجانس های مستقیم و معکوس که دو دایره در آ ن ها تصویر یکدیگرند را مشخص کنید.

الف) دو دایره متخارج

ب) دو دایره مماس خارج

پ)دو دایره متقاطع

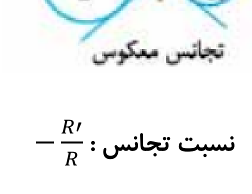
ت) دو دایره مماس درون

ث) دو دایره متداخل

ج) دو دایره هم مرکز

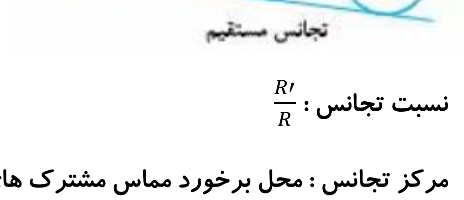
بطور خلاصه می توان گفت :

مجانس هر دایره ، خودش هم یک دایره است . و مهم تر آنکه هر دو دایره نامساوی مجانس هم اند ، که دو حالت می تواند داشته باشد :



نسبت تجانس : $-\frac{R'}{R}$

مرکز تجانس : محل برخورد مماس مشترک های داخلی



نسبت تجانس : $\frac{R'}{R}$

مرکز تجانس : محل برخورد مماس مشترک های خارجی

***تجانس در دو چندضلعی :**

اگر مجانس چندضلعی ... $ABCDE$ به مرکز O و نسبت k را رسم کنیم و چند ضلعی ... $A'B'C'D'E'$ بدست آید ، آنگاه :

- **AA' ، BB' ، CC' و ... از نقطه O می گذرد .**

- **نسبت تشابه دو چند ضلعی برابر است با .....**

مثال۱۷ : اگر nضلعی $A'_1A'_2 \dots A'_n$مجانس n ضلعی $A_1A_2 \dots A_n$ باشد ، نشان دهید این دو nضلعی با هم متشابه اند.

***سوال : آیا دو شکل متشابه ، الزاما متجانس نیستند .**

مثال۱۸ : در تجانسی با نسبت $k < 0$ و مرکز تجانس O نشان دهید :

الف) تجانس شیب را حفظ می کند .

ب) تجانس زاویه بین خطوط را حفظ می کند .

مثال۱۹ : دایره $C(O \text{ ، } R)$ و نقطه M خارج دایره مفروض است . مجانس این دایره را نسبت به نقطه M در هر یک از حالات زیر رسم کنید .

الف) $k = ۲$ ب) $k = -۲$ پ) $k = \frac{۱}{۲}$

مثال۲۰ : فرض کنید G محل برخورد میانه های مثلث ABC (مرکز ثقل آن) باشد و مثلث $A'B'C'$ مجانس مثلث ABC در تجانس به مرکز G و نسبت $k = -\frac{۱}{۲}$ باشد .

الف) مکان راس های A' و B' و C' را نسبت به مثلث ABC بیابید؟

ب) مساحت مثلث $A'B'C'$ چه کسری از مساحت مثلث ABC است ؟

مثال۲۱ : فرض کنید پاره خط $A'B'$ مجانس پاره خط AB و در تجانس به مرکز O و نسبت k باشد ، نشان دهید : $\frac{A'B'}{AB} = k$

مثال ۲۲ : O و O' مراکز دو دایره به شعاع های ۳ و ۵ می باشند . اگر $OO' =$ ۱۲ باشد ،

الف) فاصله ی مرکز تجانس مستقیم این دو دایره از مرکز دایره بزرگتر چقدر است ؟

ب) فاصله مرکز تجانس معکوس این دو دایره از مرکز دایره بزرگتر چقدر است ؟

مثال ۲۳ : دو دایره به شعاع های ۴ و ۶ و خط المرکزین ۵ مفروضند . فاصله ی مراکز تجانس مستقیم و معکوس آنها را بیابید .

مثال ۲۴ : در یک مثلث به اضلاع $AC =$ ۴ ، $AB =$ ۶ و $BC =$ ۸ با یک تجانس به مرکز A دایره محاطی داخلی و یکی از دایره های محاطی خارجی مجانس یکدیگر اند . نسبت تجانس را بیابید .

مثال ۲۵ : در ذوزنقه متساوی الساقین $ABCD$ طول قاعده های AB و CD به ترتیب ۵ و ۷ می باشد و مساحت ذوزنقه برابر ۳۶ است . اگر قاعده CD مجانس قاعده AB باشد ، فاصله مرکز تجانس مستقیم از معکوس چقدر است ؟

مثال ۲۶ : در ذوزنقه $ABCD$ ضلع AB با یک تجانس به مرکز نقطه O و نسبت $-\frac{۳}{۲}$ بر روی ضلع CD تصویر می شئد . اگر مساحت مثلث AOB برابر با ۴ باشد ، مساحت ذوزنقه چقدر است ؟

مثال ۲۷ : یک مربع را در تجانسی با نسبت تجانس $\frac{۲}{۳}$ و به مرکز محل تلاقی قطر ها تصویر کرده ایم . اگر مساحت بین مربع و تصویرش ۵ باشد ، محیط مربع اولیه را بیابید .

مثال های بیشتر :

در تجانس به مرکز O و نسبت تجانس k، نقطهٔ M' مجانس نقطهٔ M می‌باشد. با همین مرکز و کدام نسبت تجانس، M مجانس M' خواهد بود؟

۱) $2k$ ۲) k ۳) $\frac{1}{k}$ ۴) $\frac{k}{2}$

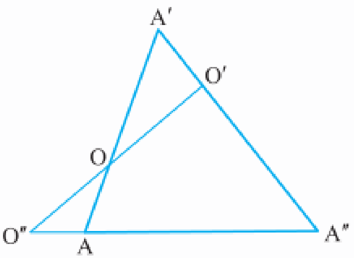
- در تجانس به مرکز O و نسبت تجانس $k > 1$، نقطهٔ M' مجانس نقطهٔ M می‌باشد. اگر در تجانس به مرکز M نقطهٔ O تصویر نقطهٔ M' باشد. نسبت تجانس کدام است؟

۱) $1-k$ ۲) $k-1$ ۳) $\frac{1}{k-1}$ ۴) $\frac{1}{1-k}$

تصویر دایرهٔ $C(O,1)$ تحت تجانس با نسبت تجانس ۳، دایره C' به مرکز O' است. اگر $OO' = 2\sqrt{5}$ باشد، آن‌گاه طول مماس مشترک خارجی دو دایره کدام است؟

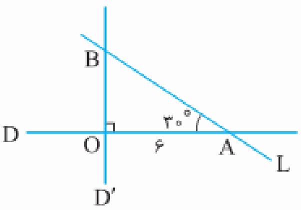
۱) ۳ ۲) $2\sqrt{3}$ ۳) ۴ ۴) $3\sqrt{2}$

- در شکل زیر $\frac{OA'}{OA} = 2$ و $\frac{O'A''}{O'A'} = 3$ است. اگر A'' تصویر A در تجانس به مرکز O'' و نسبت تجانس k باشد، آن‌گاه مقدار k کدام است؟



۱) ۴
۲) ۵
۳) ۶
۴) ۸

- در شکل زیر خط L را در تجانس به مرکز O و نسبت تجانس ۳ تصویر می‌کنیم. مساحت بین خط L و تصویرش و خط‌های D و D' کدام است؟



۱) $36\sqrt{3}$
۲) $48\sqrt{3}$
۳) $54\sqrt{3}$
۴) $64\sqrt{3}$

-

درس دوم :

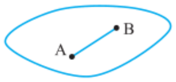
کاربرد تبدیلات :

۱.کاربرد بازتاب در حل مسائل هم پیرامونی یا هم محیطی :

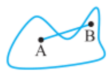
می خواهیم بدون اینکه محیط یک چنهضلهی تغییر کند ، مساحت چند ضلعی را تغییر دهیم .

برای رسیدن به این هدف ، ابتدا شکل هایی محدب و مقعر را یادآوری می کنیم .

شکل بسته ای را محدب گوییم که اگر هر دو نقطه دلخواه از درون آن شکل را به هم وصل کنیم ، آن گاه تمام پاره خط حاصل، درون شکل قرار گیرد .در غیر این صورت اگر دو نقطه در شکل وجود داشت که قسمتی از پاره خط واصل آن ها بیرون شکل قرار گرفت ، شکل مقعر است.

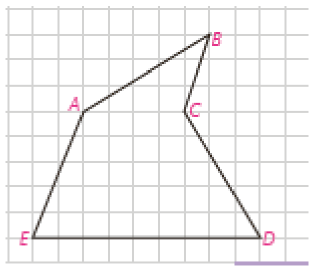


شکل (۱)
هر دو نقطهٔ دلخواه از این شکل را به هم وصل کنیم، پاره‌خط حاصل، درون شکل قرار دارد.



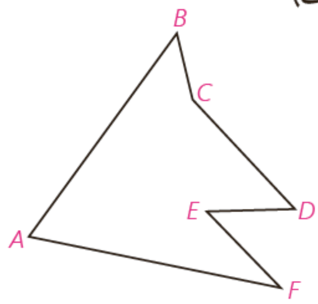
شکل (۲)
دست‌کم دو نقطه در این شکل وجود دارند که اگر آن‌ها را به هم وصل کنیم، قسمتی از پاره‌خط حاصل، بیرون شکل قرار می‌گیرد.

مثال ۲۸: در شکل مقابل ، زمینی به شکل چندضلعی مقعر $ABCDE$ داده شده است که دور آن را حصار کشیده ایم ، با ثابت نگه داشتن محیط و ثابت نگه داشتن تعداد اضلاع چندضلعی ، بدون اینکه حصار کشی تغییر کند ، مساحت زمین را افزایش دهید.

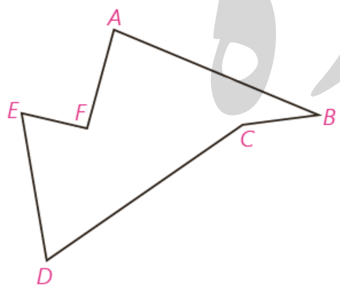


مثال ۲۹: دور زمین هایی مطابق شکل حصار کشی شده است . چطور می توان بدون کم و زیاد کردن حصارها ، مساحت زمین را افزایش داد ؟

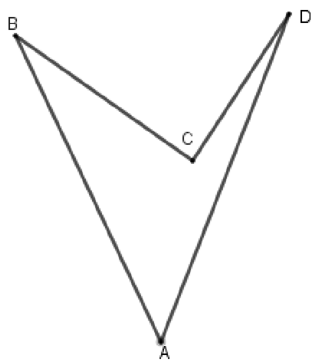
الف)



ب)

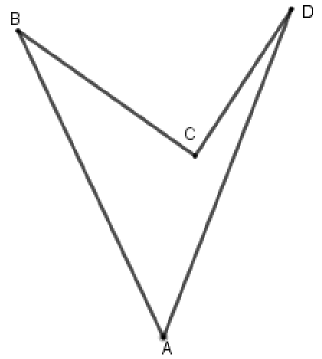


مثال ۳۰ : دور زمینی مطابق شکل حصار کشی شده است . با جابه جایی حصار های BC و CDبدون آنکه طول آنها تغییر کند ، مساحت زمین را افزایش می دهیم . مساحت کل زمین پس از تغییر چقدر است ؟ ($\widehat{BCD} = ۹۰$. $AB = AD = ۵\sqrt{۲}$.$BC = CD = ۶$)

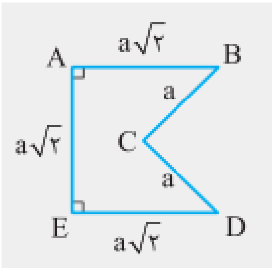


مثال ۳۱ : در شکل زیر با یک بازتاب مساحت چهارضلعی $ABCD$ را بدون تغییر محیط افزایش می دهیم . مساحت جدید چهارضلعی چقدر است ؟

$(CD = ۸ \ . \ BC = ۶ \ . AB = AD = ۱۰ \ . \hat{A} = ۶۰)$



تمرین ۴: در شکل مقابل ، با یک بازتاب شکل را به شکلی محدب و هم محیط با شکل اولیه تبدیل می کنیم . نسبت مساحت شکل حاصل به مساحت شکل اولیه کدام است ؟



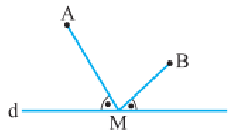
۱) ۵ ۲) $\frac{۵}{۲}$ ۳) $\frac{۵}{۳}$ ۴) $\frac{۵}{۴}$

۲.درجست و جوی کوتاه ترین مسیر بین دو نقطه با شرایطی خاص

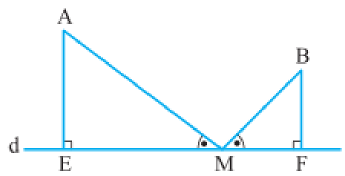
الف) خط d و دو نقطه A و B در دو طرف آن مفروض اند . نقطه ای مانند M روی d چنان بیابید که مجموع فواصل آن از دو نقطه A و B کم ترین مقدار ممکن را داشته باشد .

ب) خط d و دو نقطه A و B در یک طرف آن مفروض اند . نقطه ای مانند M روی d چنان بیابید که مجموع فواصل آن از دو نقطه A و B کم ترین مقدار ممکن را داشته باشد .(مسئله هرون)

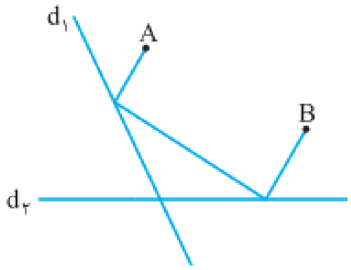
نکته : اگرنقطه M روی خط d چنان باشد که $MA+MB$ کمترین مقدار را داشته باشد ، آنگاه پاره خط های MA و MB با خط d زاویه های مساوی می سازند. (چرا ؟)



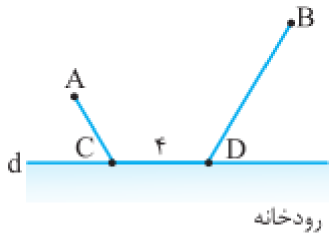
مثال ۳۲: در مسئله هرون ثابت کنید نقطه M ، پاره خط EF را به نسبت فواصل نقاط A و B از خط d تقسیم می کند .



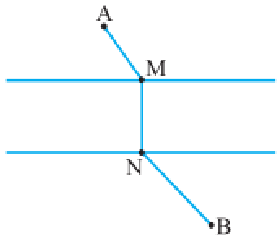
پ) دو خط متقاطع $d_۱$ و $d_۲$ و نقاط ثابت A و B مطابق شکل مفروض اند . کوتاه ترین مسیری را تعیین کنید که از نقطه A آغاز شود و پس از برخورد با دو خط $d_۱$ و $d_۲$ از نقطه B بگذرد .



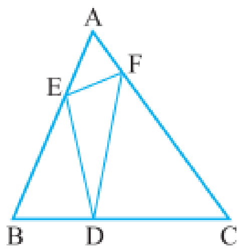
ت) دو شهر A و B مطابق شکل در یک طرف رودخانه ای واقع اند . می خواهیم جاده ای از A به B بسازیم ، به طوری که ۴ کیلومتر از این جاده ، در ساحل رودخانه ساخته شود . این ۴ کیلومتر را در چه قسمتی از رودخانه بسازیم تا مسیر $ACDB$ کوتاه ترین مسیر ممکن باشد ؟



ث) اگر دو شهر A و B دو طرف رودخانه باشند و بخواهیم جاده ای از A به B بسازیم که پل MN عمود بر راستای رودخانه باشد ، محل احداث پل را کجا در نظر بگیریم که مسیر $AMNB$ کوتاه ترین مسیر ممکن باشد ؟



مثال ۳۳: مثلث ABC مطابق شکل مفروض است . نقطه معلوم D را روی ضلع BC در نظر می گیریم . مثلث DEF را چنان رسم کنید که محیط آن کم ترین مقدار ممکن را داشته باشد ؟



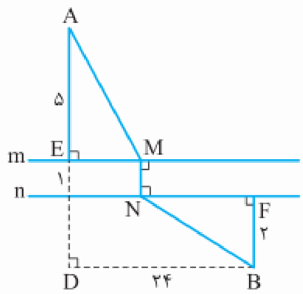
دو مسئله از بیشترین مقدار تفاضل :

الف) خط d و دو نقطه A و B یک طرف آن مفروض اند . نقطه ای مانند M روی خط d چنان بیابید که قدر مطلق فواصل آن از دو نقطه A و B بیشترین مقدار ممکن را داشته باشد .

ب) خط d و دو نقطه A و B دو طرف آن مفروض اند . نقطه ای مانند M روی خط d چنان بیابید که قدر مطلق فواصل آن از دو نقطه A و B بیشترین مقدار ممکن را داشته باشد .

مثال های بیشتر :

- دو خط موازی m و n به فاصلهٔ یک از هم قرار دارند و نقاط A و B مطابق شکل دو طرف خط قرار دارند. اگر $AE = ۵$ و $BF = ۲$ و $BD = ۲۴$ ، آن‌گاه طول کوتاه‌ترین مسیر AMNB کدام است؟



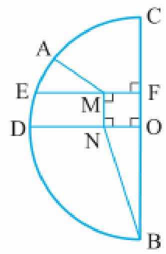
۱) ۲۵

۲) ۲۸

۳) ۲۶

۴) ۲۷

- در شکل زیر نیم‌دایره به مرکز O و قطر $BC = ۸$ مفروض است. وتر EF با شعاع OD موازی می‌باشد و اندازهٔ کمان AC برابر ۶۰° است. اگر اندازهٔ OF یک‌چهارم شعاع دایره باشد، آن‌گاه کم‌ترین طول مسیر AMNB کدام است؟



۱) ۷

۲) $\sqrt{۳۸}+۱$

۳) $\sqrt{۳۹}+۱$

۴) $\sqrt{۳۷}+۱$

- دو خط متقاطع d و d' و پاره‌خط AB غیرموازی با d و d' در صفحهٔ آن‌ها مفروض است. برای رسم پاره‌خطی موازی و مساوی AB که دو سر آن بر روی این خط‌ها باشد، کدام تبدیل هندسی به کار می‌رود؟ *(سراسری ریاضی خارج از کشور ۸۹)*

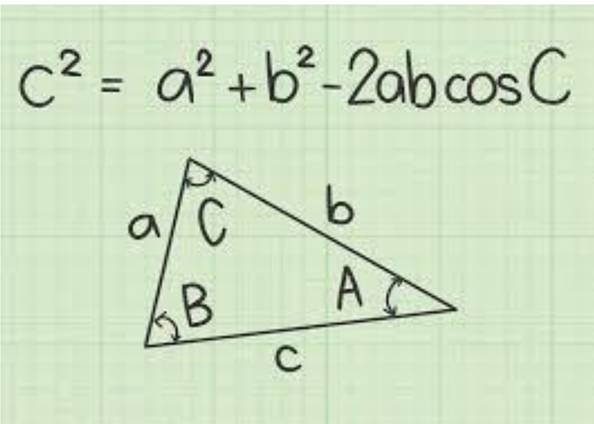
۱) بازتاب ۲) انتقال ۳) دوران ۴) تجانس

- با استفاده از کدام تبدیل هندسی، داخل مثلث مفروض می‌توان مربعی محاط کرد که یک ضلع آن بر روی ضلع مثلث و دو رأس دیگر بر روی دو ضلع این مثلث قرار گیرند؟ *(سراسری ریاضی ۹۴)*

۱) دوران ۲) بازتاب ۳) انتقال ۴) تجانس

فصل سوم

روابط طولی در مثلث



درس اول : قضیه سینوس ها

منظور از روابط طولی ، را بطه هایی است که در مورد اندازه های پاره خط ها و زاویه ها در شکل های مختلف بحث می کند.

برای مثال در فصل اول با روابط طولی در دایره ها و در سال پیش نیز به کمک مثلث های متشابه روابط طولی را در مثلث قائم الزاویه دیدیم.

فرض کنید مثلث ABC $(A = ۹۰ \quad)$ و ارتفاع وارد بر وتر آنرا رسم کرده ایم ، در این صورت خواهیم داشت :

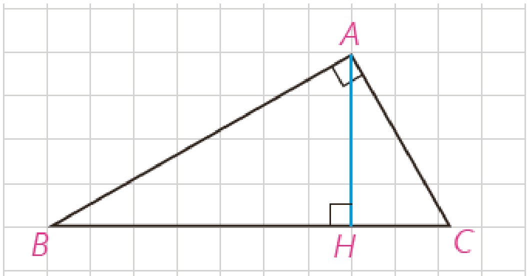
۱ـ $AB^{۲}=BC.BH$

۲ـ $AC^{۲}=BC.CH$

۳ـ $AH^{۲}=BH.CH$

۴ـ $AB^{۲}+AC^{۲}=BC^{۲}$

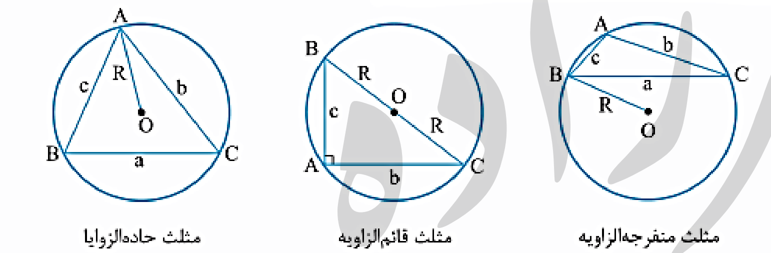
۵ـ $AB.AC=BC.AH$



حال در ادامه به بررسی روابط طولی در مثلث دلخواه می پردازیم.

قضیه ۱: قضیه سینوس ها

در هر مثلث دلخواه نسبت اندازه هر ضلع به سینوس زاویه روبه روی آن برابر است با قطر دایره محیطی مثلث.

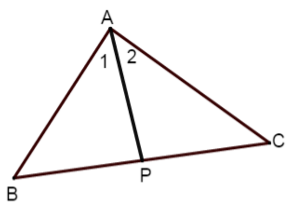


$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=۲R \Leftrightarrow \begin{cases} a=۲R\sin A \\ b=۲R\sin B \\ c=۲R\sin C \end{cases}$$

اثبات :

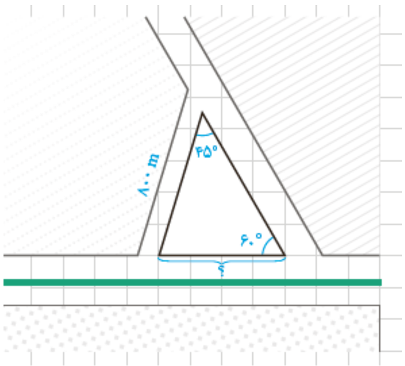
قضیه ۲: اگر P نقطه دلخواهی روی ضلع BC باشد ، داریم :

$$\frac{\sin \widehat{A_۲}}{\sin \widehat{A_۱}} = \frac{AB \cdot PC}{AC \cdot BP}$$



مثال ۱ : در مثلث ABC، $BC = ۱۰\ cm$ و $\hat{A} = ۱۲۰$ و $AC = \frac{۱۰\sqrt{۶}}{۳}$ می باشد ، مقدار شعاع دایره محیطی مثلث و اندازه های زاویه های C و B را به دست آورید.

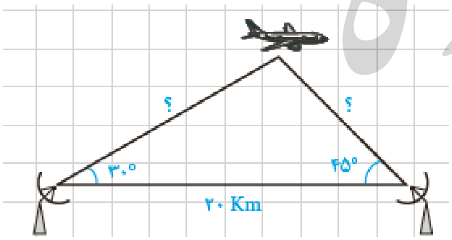
مثال ۲: از یک بلوار فرعی ، یک خیابان فرعی باریک با زاویه ۶۰ جدا شده است. اکنون شهرداری می خواهد خیابان فرعی دیگری به طول ۸۰۰متر بنا کند تا با زاویه ۴۵ از خیابان فرعی اول جدا وبه بلوار منتهی شود . این خیابان از چه فاصله ای از راس زاویه ۶۰ باید شروع شود و با بلوار چه زاویه ای می سازد؟



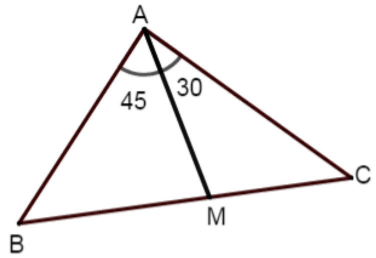
تمرین ۱: ثابت کنید در هر مثلث قائم الزاویه ABC($A = ۹۰$) با ارتفاع $AH = h_a$ داریم :

$$\frac{۱}{h_a^۲} = \frac{۱}{b^۲} + \frac{۱}{c^۲}$$

تمرین۲ : دو ایستگاه رادار که در فاصله ۲۰ کیلومتری از هم واقع شده اند، هواپیمایی را با زاویه های ۳۰ و ۴۵ رصد کرده اند. فاصله هواپیما از دو ایستگاه را بدست آورید.



مثال۳ : اگر AM میانه وارد بر ضلع BC باشد ، نسبت $\frac{AB}{AC}$ را بدست آورید.



مثال های بیشتر:

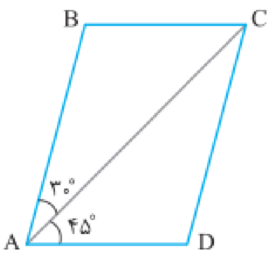
. شعاع دایرهٔ محیطی مثلث متساوی‌الساقین ABC برابر $۸\sqrt{۳}$ است. اگر زاویهٔ رأس این مثلث برابر ۱۲۰° باشد، محیط این مثلث کدام است؟

۱) $۱۶\sqrt{۳}+۲۰$ ۲) $۸\sqrt{۳}+۱۲$ ۳) $۱۶\sqrt{۳}+۲۴$ ۴) $۸\sqrt{۳}+۲۰$

اگر در مثلث ABC ، رابطهٔ $a\sin A = b\sin B$ برقرار باشد، این مثلث همواره:

۱) در هر سه زاویه حاده است. ۲) قائم‌الزاویه است.

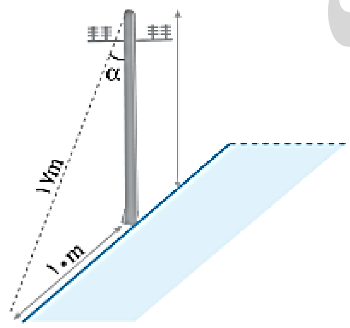
۳) متساوی‌الساقین است. ۴) متساوی‌الاضلاع است.



در شکل مقابل ABCD متوازی‌الاضلاع است. نسبت اضلاع این متوازی‌الاضلاع کدام است؟

۱) $\frac{\sqrt{۳}}{۲}$ ۲) $\frac{۱}{۲}$

۳) $\sqrt{۳}$ ۴) $\sqrt{۲}$

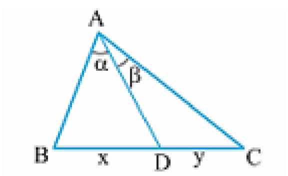


. در شکل مقابل یک تیر چراغ برق در لحظه‌ای که با اشعهٔ آفتاب زاویهٔ α می‌سازد، دارای سایه‌ای برابر ۱۰m است. کدام گزینه دربارهٔ زاویه‌ای که سطح شیب‌دار با سطح افق می‌سازد (β) صحیح است؟ $(\sin\alpha = a)$

۱) $\sin\beta = ۱/۷a$ ۲) $\cos\beta = ۱/۷a$

۳) $\tan\beta = ۱/۷a$ ۴) $\tan\beta = \frac{۱۰}{۱۷}a$

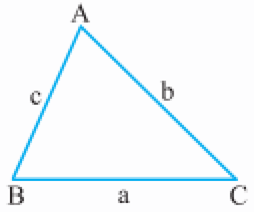
در شکل مقابل ثابت کنید : $\frac{y}{x} = \frac{\sin\beta}{\sin\alpha} \times \frac{\sin B}{\sin C}$



درس دوم قضیه کسینوس ها:

قضیه ۱: در هر مثلث داریم :

$$\begin{cases} a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A \\ b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos B \\ c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C \end{cases}$$



اثبات:

مثال ۱ : در مثلث ABC ، $A = 60$ و $AC = \sqrt{6} + \sqrt{2}$ و $AB = 2\sqrt{2}$ می باشد . طول اضلاع و زوایای دیگر مثلث را بدست آورید.

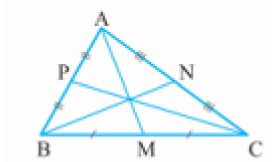
نتایج قضایای کسینوس ها :

- تعیین نوع مثلث :

$$\begin{cases} 0 < \hat{A} < 90 \iff a^2 < b^2 + c^2 \\ A = 90 \iff a^2 = b^2 + c^2 \\ 90 < \hat{A} < 180 \iff a^2 > b^2 + c^2 \end{cases}$$

- قضیه میانه ها : در هر مثلث مجموع مربعات دو ضلع برابر است با دو برابر مربع میانه نظیر ضلع سوم بعلاوه نصف مربع ضلع سوم .

اثبات:



$$\begin{cases} b^2 + c^2 = 2\,m_a^2 + \dfrac{a^2}{2} \\ a^2 + c^2 = 2\,m_b^2 + \dfrac{b^2}{2} \\ b^2 + a^2 = 2\,m_c^2 + \dfrac{c^2}{2} \end{cases}$$

نتیجه ۱ : درهر مثلث مجموع مربعات سه میانه برابر است با $\frac{۳}{۴}$ مجموع مربعات سه ضلع آن .(چرا؟)

$$m_a^۲+m_a^۲+m_a^۲=\frac{۳}{۴}(a^۲+b^۲+c^۲)$$

نتیجه۲: در هر مثلث میانه نظیر ضلع بزرگتر ، کوچکترین میانه مثلث است .(چرا؟)

نتیجه ۳: اگر دو میانه مثلثی برابر باشد ، آنگاه مثلث متساوی الساقین می باشد.(چرا؟)

نتیجه۴: اگر دو میانه مثلثی بر هم عمود باشند ، آنگاه طول میانه ها اضلاع مثلث قائم الزاویه می باشند.(چرا؟) و نهایتا خواهیم داشت :

$$b^۲+c^۲=۵a^۲$$

تمرین ۱: ثابت کنید در هر مثلث قائم الزاویه مجموع مربعات میانه های نظیر ساق ها، پنج برابر مربع میانه نظیر وتر است.

صورت دیگر قضیه میانه ها :

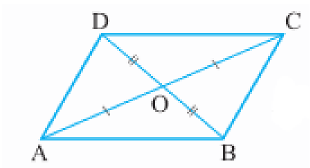
در هر مثلث ABC داریم :

$$\begin{cases} m_a^۲=\frac{۱}{۴}(b^۲+c^۲+۲\ bc\cos A) \\ m_b^۲=\frac{۱}{۴}(a^۲+c^۲+۲\ ac\cos B) \\ m_C^۲=\frac{۱}{۴}(b^۲+c^۲+۲\ ba\cos C) \end{cases}$$

تمرین۲: رابطه های بالا را اثبات کنید.

کاربرد قضیه میانه ها در دو مساله مهم :

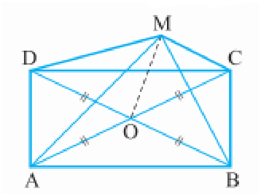
۱ – ثابت کنید مجموع مربعات اضلاع هر متوازی الاضلاع برابر است با مجموع مربعات دو قطر آن.



$$AC^۲ + BD^۲ = ۲(AB^۲ + BC^۲)$$

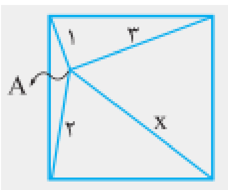
اثبات :

۲ – نقطه ای در صفحه یک مستطیل در نظر میگیریم . ثابت کنید مجموع مربعات فواصل این نقطه از دو راس برابر با مجموع مربعات فواصلش از دو راس دیگر مستطیل است .

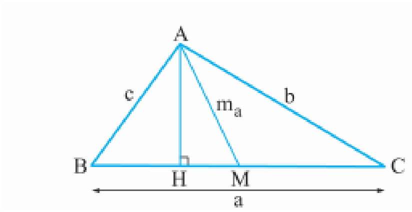


اثبات:

مثال ۲ : در شکل زیر نقطه A از راس های مربع به فاصله های ۱، ۲، ۳ و x قرار دارد . مقدار x را بیابید.



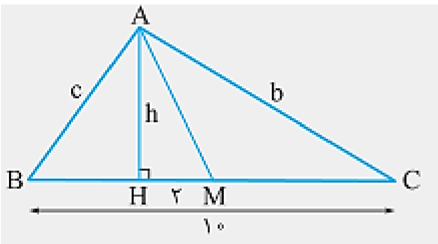
۳ در هر مثلث ABC، با فرض $AC > AB$ با رسم میانهٔ AM و ارتفاع AH مطابق شکل داریم:



$$b^۲ - c^۲ = ۲a \times MH$$

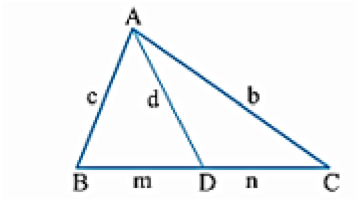
اثبات :

مثال۳: در مثلث ABC ، AM میانه و AH ارتفاع است . اگر $BC = ۱۰$ و محیط مثلث ۳۰ و $MH = ۲$ باشد ، طول ارتفاع را بدست آورید.



- قضیه استوارت : اگر نقطه D دلخواهی روی ضلع BC باشد با توجه به شکل داریم :

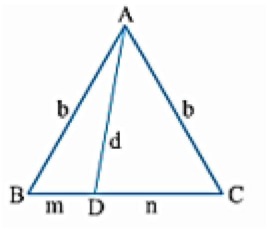
$$d^۲ = \frac{mb^۲ + nc^۲}{m+n} - mn$$



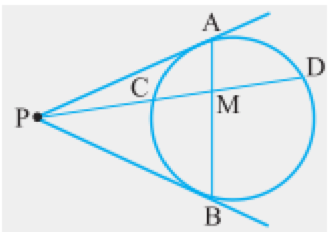
اثبات :

تذکر : اگر مثلث ABC متساوی الساقین باشد ، آن گاه قضیه استوارت به صورت زیر نوشته می شود :

$$d^۲ = b^۲ - mn$$

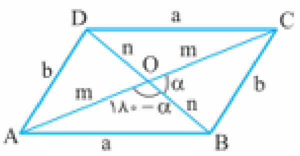


مثال۴: در شکل مقابل اگر $PC = CD = ۱$ باشد ، CM چقدر است ؟



تذکر:

محاسبه ی مساحت یک متوازی الاضلاع بر حسب اندازه اضلاع و زاویه بین دو قطر آن:



$$\begin{cases} a^2 = m^2 + n^2 - 2mn\cos(180 - \alpha) \\ b^2 = m^2 + n^2 - 2mn\cos\alpha \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a^2 = m^2 + n^2 + 2mn\cos\alpha \\ b^2 = m^2 + n^2 - 2mn\cos\alpha \end{cases} \xrightarrow{\text{تفاضل}} a^2 - b^2 = 4mn\cos\alpha \Rightarrow mn = \frac{a^2 - b^2}{4\cos\alpha} \qquad (1)$$

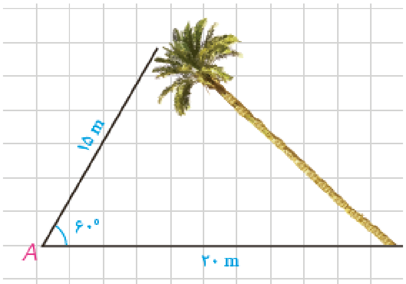
$$S = \frac{1}{2} \times AC \times BD \times \sin\alpha = \frac{1}{2}(2m)(2n) \times \sin\alpha = 2mn\sin\alpha \qquad (2)$$

$$(1),(2) \Rightarrow S = 2 \times \frac{a^2 - b^2}{4\cos\alpha}\sin\alpha = \frac{a^2 - b^2}{2}\tan\alpha$$

تمرین۳: در مثلثی رابطه $b^3 + c^3 = a^2 b + a^2 c$ بین اضلاع برقرار است ، زاویه A چند درجه است ؟

تمرین۵: در مثلثی رابطه $a^3 = b^3 + c^3$ بین اضلاع برقرار است ، ثابت کنید $60 < \hat{A} < 90$.

مسائل کتاب درسی :

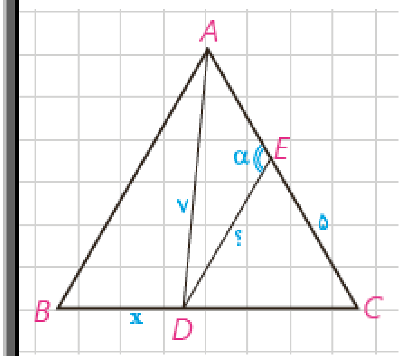


۱. یک درخت کج از نقطه A روی زمین که در فاصله ۱۵ متری از نوک درخت است به زاویه ۶۰ دیده می شود . اگر فاصله A تا پای درخت ۲۰ متر باشد ، مطلوب است :

الف) طول درخت

ب) زاویه ای که درخت با سطح زمین می سازد ؟

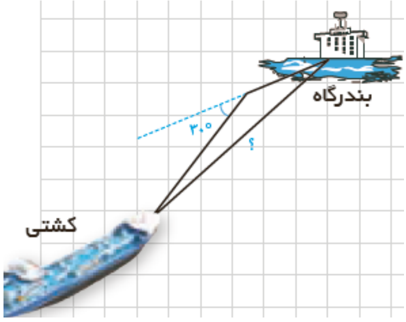
ج) فاصله نوک درخت از زمین



۲. در مثلث متساوی الاضلاع ABC به ضلع ۸ واحد ، نقطه D که به فاصله ۷ واحد از راس قرار دارد، از B و C چه فاصله ای دارد ؟ $(CD > BD)$

نقطه E،که به فاصله ۵ واحد از C قرار دارد از D به چه فاصله ای است ؟

اندازه زاویه AED چند درجه است ؟

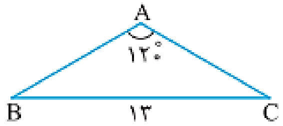


۳. یک کشتی از یک نقطه با سرعت ۶۰ کیلومتر در ساعت در یک جهت در حرکت است و یک ساعت بعد با ۳۰درجه انحراف به رایت با سرعت ۴۰ کیلومتر در ساعت به حرکت خود ادامه میدهد و یک ساعت و نیم پس از آغاز حرکتش در یک بندرگاه پهلو می گیرد .

فاصله بندرگاه از مبدا حرکت کشتی چند کیلومتر است ؟

مثال های بیشتر:

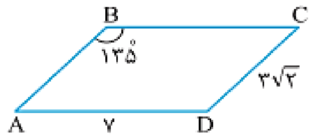
. در شکل مقابل، اگر $\frac{AB}{AC}=\frac{۷}{۸}$ ، محیط مثلث کدام است؟



۱) ۲۴   ۲) ۲۸

۳) ۱۸   ۴) ۲۰

. در متوازی‌الاضلاع مقابل، نسبت قطرها کدام است؟



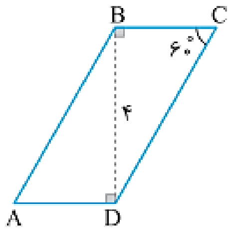
۱) $\frac{۳\sqrt{۲}}{۷}$ ۲) $\frac{\sqrt{۱۰۹}}{۵}$

۳) $\sqrt{\frac{۱۰۵}{۷}}$ ۴) $\frac{۲۱\sqrt{۷}}{۵}$

. در مثلث ABC ، رابطهٔ $b^۲-c^۲=a^۲+a\cdot c$ برقرار است. زاویهٔ B کدام است؟

۱) ۴۵° ۲) ۱۳۵° ۳) ۶۰° ۴) ۱۲۰°

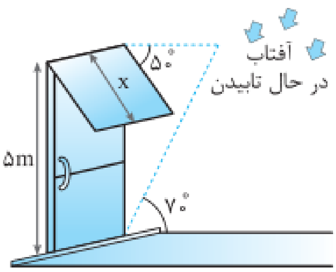
. در شکل مقابل ABCD متوازی‌الاضلاع است. طول قطر AC کدام است؟



۱) $۴\sqrt{۵}$ ۲) $\sqrt{\frac{۱۰۰}{۷}}$

۳) $۱۰\sqrt{۵}$ ۴) $\sqrt{\frac{۱۱۲}{۳}}$

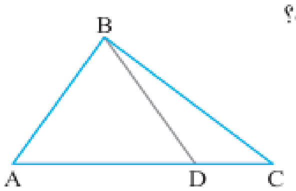
. در شکل مقابل زاویه‌ای که سایه‌بانِ در با سطح افق می‌سازد برابر ۵۰° و ارتفاع آن از زمین برابر 5m است. در این وضعیت اگر اشعه‌های آفتاب بیشتر از ۷۰° با سطح افق زاویه ساخته باشند، به در برخورد نمی‌کنند. طول این سایه‌بان کدام است؟



۱) $\sqrt{۳}\cos ۷۰^\circ$ ۲) $۱۰\sqrt{۳}\sin ۷۰^\circ$

۳) $\frac{۱۰\sqrt{۳}}{۳}\cos ۷۰^\circ$ ۴) $۵\sqrt{۳}\sin ۷۰^\circ$

. در مثلث ABC شکل مقابل $\frac{CD}{AD}=\frac{۱}{۲}$ است. اگر $AB=۱۴$ و $BC=۱۳$ و $AC=۱۵$ باشد، BD کدام است؟



۱) $۸\sqrt{۲}$ ۲) $۱۰\sqrt{۲}$

۳) $۸\sqrt{۶}$ ۴) $۱۰\sqrt{۶}$

. در مثلثی به اضلاع ۱۵، ۱۲ و ۹، طول بزرگ‌ترین میانه کدام است؟

۱) ۷/۵   ۲) $\sqrt{۶۵۷}$ ۳) $\frac{\sqrt{۶۵۷}}{۲}$ ۴) $\frac{\sqrt{۶۵۷}}{۴}$

. در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC $(\hat{C}=۹۰^\circ)$، اضلاع AB و AC به‌ترتیب ۱۳ و ۱۲ هستند. روی امتداد AB از طرف A نقطهٔ D را می‌گیریم. اگر $BD=۲۶$ باشد، CD کدام است؟

۱) $۱۰\sqrt{۶}$ ۲) $\sqrt{۶۰۱}$ ۳) ۲۵   ۴) $\sqrt{۶۲۰}$

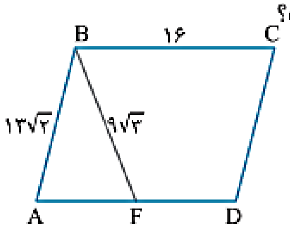
. متوازی‌الاضلاعی با زاویهٔ حاده ۶۰° مفروض است. اگر نسبت مربعات قطرهای این متوازی‌الاضلاع برابر $\frac{۱}{۳}$ باشد، نسبت اضلاع این متوازی‌الاضلاع کدام است؟

۱) ۱
۲) $\frac{۱}{۲}$
۳) $\frac{۱}{۹}$
۴) $\frac{\sqrt{۳}}{۳}$

. در متوازی‌الاضلاعی، یکی از زوایا ۱۲۰° و قطر کوچک‌تر برابر $۵\sqrt{۳}$ است. اگر ارتفاع وارد بر ضلع بزرگ‌تر برابر $۲\sqrt{۳}$ باشد، قطر بزرگ‌تر کدام است؟

۱) ۲۲
۲) $\sqrt{۹۱-۲۴\sqrt{۷}}$
۳) $\sqrt{۹۱+۲۴\sqrt{۷}}$
۴) ۱۰

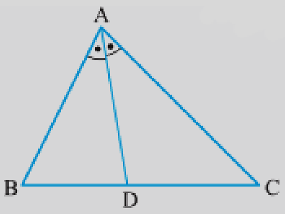
. در شکل مقابل ABCD متوازی‌الاضلاع است اگر F وسط AD باشد، قطر بزرگ متوازی‌الاضلاع کدام است؟



۱) $۴\sqrt{۵۷}$
۲) $۲\sqrt{۵۷}$
۳) $۶\sqrt{۱۹}$
۴) $۸\sqrt{۱۹}$

درس سوم : نیمسازهای داخلی و محاسبه طول آن

قضیه ۱ : در هر مثلث نیمساز هر زاویه داخلی ، ضلع روبه رو به آن زاویه را به نسبت اندازه های دو ضلع دیگر آن زاویه تقسیم می کند.



$$\hat{A} \text{ نیمساز } AD \Rightarrow \frac{BD}{CD} = \frac{AB}{AC}$$

اثبات :

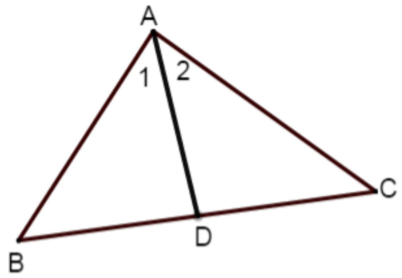
روش اول:

روش دوم :

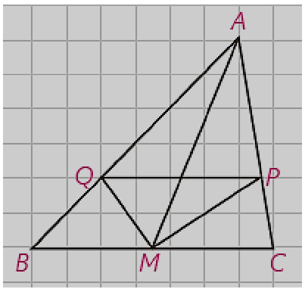
روش سوم :

قضیه۲ : در هر مثلث ، مربع اندازه نیمساز های داخلی برابر است با حاصل ضرب اندازه دو ضلع زاویه ، منهای حاصل ضرب دو قطعه ای که نیمساز روی ضلع مقابل ایجاد کرده است .

$$AD^2 = AB \cdot AC - DB \cdot DC$$

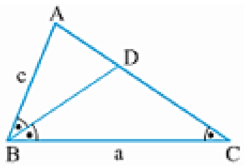


تمرین ۱ : در مثلث ABC، M وسط BC و MP و MQ نیمساز های زاویه های AMC و AMB هستند . ثابت کنید $PQ \| BC$.



رابطه بین اضلاع مثلثی که یکی از زوایای آن دو برابر زاویه دیگرش باشد :

فرض کنیم در مثلث ABC داشته باشیم $B = 2C$ ، نیمساز زاویه B را رسم می کنیم . مثلث BDC متساوی الساقین است ، پس $BD = CD$، بنا به قضیه نیمساز ها داریم :



$$\frac{AD}{CD} = \frac{AB}{BC} = \frac{c}{a} \Rightarrow \begin{cases} AD = kc \\ CD = ka \end{cases} \Rightarrow BD = CD = ka$$

$$BD^2 = AB \times BC - AD \times CD \Rightarrow (ka)^2 = ac - kc \times ka \Rightarrow k^2a^2 = ac - k^2ac \Rightarrow k^2(a+c) = c \Rightarrow k^2 = \frac{c}{a+c}$$

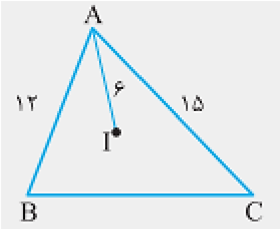
$$AC = AD + CD \Rightarrow b = kc + ka \Rightarrow b^2 = k^2(a+c)^2 \Rightarrow b^2 = \frac{c}{a+c}(a+c)^2 \Rightarrow b^2 = c(a+c)$$

بنابراین می توان گفت :

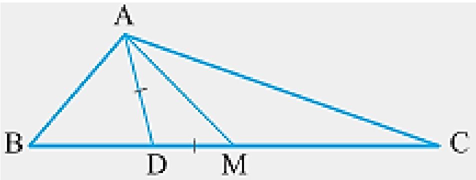
در مثلثی که اندازه یک زاویه دو برابر زاویه دیگر باشد ، ضلع رو به روی زاویه دو برابر ، واسطه هندسی مجموع دو ضلع دیگر و ضلع روبه روی زاویه نصف است .

مثال ۱ :در مثلث ABC، $AB = ۴$ و $AC = ۶$ است . اگر عمودمنصف ضلع BCو نیمساز راس B روی ضلع AC یکدیگر را قطع کنند ، اندازه ضلع سوم مثلث را بدست آورید.

مثال۲: در شکل مقابل I نقطه همرسی نیمساز هاست . طول ضلع BC را بدست آورید.



مثال۳ : در مثلث ABC ، AM میانه و AD نیمساز زاویه A می باشد ، اگر $AD = DM$ باشد، آنگاه ثابت کنید : $a^{۲} = ۴\ bc$

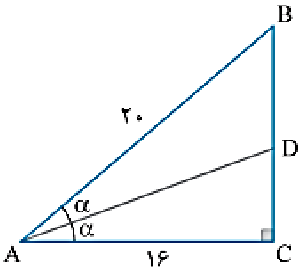


مثال های بیشتر :

در مثلث ABC، BD نیمساز است. اگر $AB+BC=۴۸$ ، $AD=۹$ و $DC=۱۵$ باشد، اختلاف اضلاع AB و BC در مثلث ABC کدام است؟

۱) ۹   ۲) ۸   ۳) ۱۲   ۴) ۶

. در شکل مقابل، AD نیمساز است. اختلاف BD و DC کدام است؟



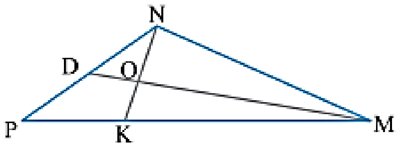
۱) $\frac{۴}{۳}$

۲) $\frac{۵}{۳}$

۳) $\frac{۵}{۲}$

۴) ۲

. در شکل مقابل MD و NK نیمسازهای مثلث MNP هستند. اگر $MN=۵$ و $NP=۳$ و $PM=۷$ باشد، نسبت $\frac{OK}{ON}$ کدام است؟



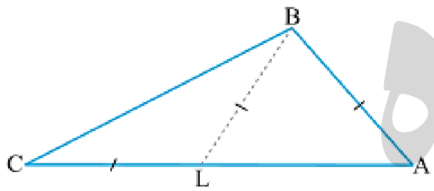
۱) $\frac{۸}{۷}$ ۲) ۵

۳) $\frac{۱۰}{۷}$ ۴) $\frac{۷}{۸}$

. در مثلث ABC ، اضلاع AB و BC و AC به ترتیب با اعداد ۲ و ۴ و ۵ متناسب‌اند. نقطهٔ تلاقی نیمسازها، نیمساز زاویهٔ A را به چه نسبتی تقسیم می‌کند؟

۱) $\frac{۷}{۲}$ ۲) $\frac{۷}{۵}$ ۳) $\frac{۷}{۳}$ ۴) $\frac{۷}{۴}$

. در مثلث ABC، نیمساز BL برابر با LC و ضلع AB است. اگر $AC=b$ باشد، محیط مثلث ABC کدام است؟



۱) $\frac{۳}{۲}b-\frac{\sqrt{۵}}{۲}b$ ۲) $\frac{۳}{۲}b+\frac{\sqrt{۵}}{۲}b$

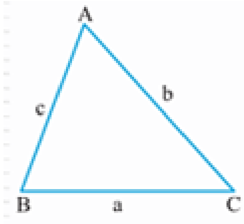
۳) $\frac{\sqrt{۳}}{۲}b+\frac{۵}{۲}b$ ۴) $\frac{۵}{۲}b-\frac{\sqrt{۳}}{۲}b$

. مثلث متساوی‌الساقین ABC با $AC=b$ و $AB=BC=a$ مفروض است. اگر AM و CN نیمسازهای داخلی زوایای A و C باشند، طول MN کدام است؟

۱) $\frac{|a-b|}{a+b}$ ۲) $\frac{a+b}{ab}$ ۳) $\frac{ab}{a+b}$ ۴) $\frac{a+b}{|a-b|}$

درس چهارم : قضیه هرون (محاسبه ارتفاع و مساحت مثلث)

در این قسمت می خواهیم روابطی جدید برای یافتن مساحت مثلث معرفی کنیم.



قضیه هرون : در مثلث ABC مساحت مثلث برابر است با :

$S = \sqrt{P(P-a)(P-b)(P-c)}$ که در آن $P = \frac{a+b+c}{۲}$

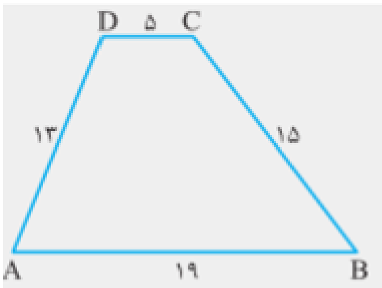
نتیجه : مساحت مثلث متساوی الاضلاع به ضلع a برابر است با .... و طول ارتفاع آن .... است .

؟ سوال : آیا می توان نشان داد اگر در مثلث رابطه $S = P(P-a)$ برقرار باشد ، مثلث قائم الزاویه است ؟

نتیجه : قضیه هرون در مثلث قائم الزاویه بصورت .... بیان می شود.

مثال ۱ : اندازه ضلع مثلثی ۱۴ و طول میانه های نظیر دو ضلع دیگر ۹ و۱۵ می باشد ، مساحت مثلث را بدست آورید.

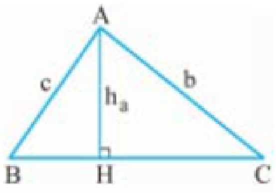
مثال ۲ : مساحت ذوزنقه مقابل را بدست آورید.



محاسبه ارتفاع مثلث به کمک قضیه هرون :

می دانیم که در حالت کلی $S = \frac{۱}{۲} h_a \times a$ و از طرفی طبق قضیه هرون داریم : $S = \sqrt{P\,(P-a)(P-b)(P-c)}$

پس می توان نتیجه گرفت :



$$h_a = \frac{2S}{a} \;. \quad h_b = \frac{2S}{b} \;. \quad h_c = \frac{2S}{c}$$

مثال۳ : شعاع دایره محاطی داخلی مثلثی به اضلاع ۹ ، ۱۰ و ۱۷ را بدست آورید.

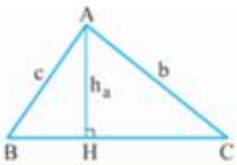
مثال۴ : دایره محاطی داخلی مثلث ABC بر اضلاع AB ، AC و BC به ترتیب در نقاط F ، D و E چنان مماس است که $BE = ۲۴$ و $AF = ۱$ و $CD = ۲$ می باشد. مساحت مثلث را بدست آورید.

مثال۵ : اندازه اضلاع مثلثی ۱۱ ، ۱۳ و ۲۰ است . تفاضل طول بزرگترین و کوچکترین شعاع های دوایر محاطی خارجی مثلث کدام است ؟

پیدا کردن مساحت مثلث به کمک نسبت های مثلثاتی:

قضیه ۱ : مساحت هر مثلث برابر است با نصف حاصل ضرب اندازه های هر دو ضلع آن در سینوس زاویه بین آن دو ضلع.

پس می توان نوشت :



$$\sin B = \frac{AH}{AB} = \frac{h_a}{c} \Rightarrow h_a = c \sin B$$

$$\sin C = \frac{AH}{AC} = \frac{h_a}{b} \Rightarrow h_a = b \sin C$$

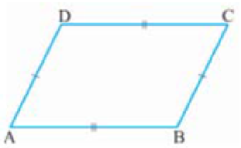
$$h_a = b\sin C = c\sin B \;,\; h_b = a\sin C = c\sin A \;,\; h_c = a\sin B = b\sin A$$

در نتیجه مساحت هر مثلث برابر است با نصف حاصل ضرب اندازه های هر دو ضلع در سینوس زاویه بین آن ها .

$$S = \frac{۱}{۲} a\, h_a = \frac{۱}{۲} a\, b \sin C = \frac{۱}{۲} a\, c \sin B \;\;.\;\; S = \frac{۱}{۲} b\, h_b = \frac{۱}{۲} c\, b \sin A$$

$$\Rightarrow S = \frac{۱}{۲} a\, b \sin C = \frac{۱}{۲} a\, c \sin B = \frac{۱}{۲} c\, b \sin A$$

نتیجه ۱: مساحت هر متوازی الاضلاع برابر است با حاصل ضرب اندازه های دو ضلع مجاور در سینوس هر زاویه داخلی دلخواه .(چرا؟)



$$S_{(ABCD)} = AB \times AC \times \sin \hat{A}$$

حالت خاص: مساحت هر لوزی برابر است با :.. .

نتیجه ۲: مساحت هر متوازی الاضلاع برابر است با نصف حاصل ضرب دو قطر آن در سینوس زاویه بین دو قطر.(چرا؟)

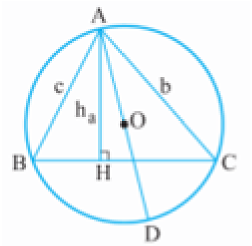
حالت خاص : مساحت هر لوزی برابر است با ....

حالت خاص : مساحت هر مربع برابر است با ....

مثال۶: اندازه دو ضلع مثلثی ۴ و $۲\sqrt{۱۳}$ می باشد ، اگر زاویه رو به رو به ضلع $۲\sqrt{۱۳}$ ، ۱۵۰ باشد ، مساحت مثلث را بدست آورید .

مثال۷ : در مثلث ABC ، اگر $h_a = \frac{c}{۲}$ و $a = ۲b$ باشد ، نوع مثلث را تعیین کنید.

محاسبه قطر دایره محیطی مثلث بر حسب دو ضلع و ارتفاع وارد بر ضلع سوم :



$$S = \frac{۱}{۲} bc \sin A = \frac{۱}{۲} a h_a \Rightarrow bc \sin A = a h_a$$

اما بنابر قضیه سینوس ها داریم : $a = ۲R \sin A$ و در نتیجه :

$$bc \sin A = ۲R \sin A \times h_a \Rightarrow bc = ۲R \times h_a$$

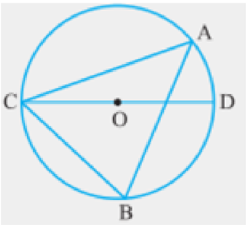
بطور کلی می توان گفت :

در هر مثلث ، حاصل ضرب هر دو ضلع برابر است با حاصل ضرب ارتفاع وارد بر ضلع سوم در قطر دایره محیطی مثلث ، یعنی :

$$bc = ۲R \times h_a \ . \ ac = ۲R \times h_b \ . \ ab = ۲R \times h_c$$

مثال۸ : شعاع دایره محیطی مثلث که دو ضلع آن ۱۳ و ۱۵ است و ارتفاع وارد بر ضلع سوم آن ۱۲ است را بدست آورید.

مثال ۹: مطابق شکل دایره محیطی مثلث ABC رسم شده است . اگر شعاع دایره $\frac{۶۵}{۶}$ و AC=20 و BC=13 باشد ، طول ضلع AB را بدست آورید.



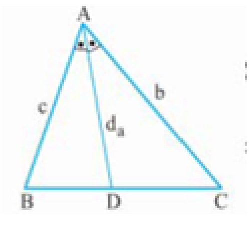
محاسبه شعاع دایره محیطی مثلثی که سه ضلع آن معلوم است:

$$S=\frac{۱}{۲}\,ab\ \sin C\ .\ \ c=۲\,R\ \sin C\ \ \rightarrow \frac{S}{c}=\frac{\frac{۱}{۲}\,ab\ \sin C}{۲\,R\ \sin C}=\frac{ab}{۴\,S}\ \rightarrow R=\frac{abc}{۴\,S}$$

مثال ۱۰: طول اضلاع مثلثی برابر با ۱۳ ، ۱۴ و ۱۵ است . طول شعاع دایره محیطی مثلث را بدست آورید.

مثال ۱۱ : اندازه اضلاع مثلثی ۶ ، ۷و ۸ است . حاصل ضرب شعاع دایره محیطی و شعاع دایره محاطی داخلی این مثلث را بدست آورید.

محاسبه طول نیمساز یک زاویه بر حسب اضلاع و اندازه آن زاویه :



$$S_{ABC}=S_{ABD}+S_{ACD}\ \Rightarrow \frac{۱}{۲}\,bc\sin A=\frac{۱}{۲}\,cd_a\sin\frac{A}{۲}+\frac{۱}{۲}\,bd_a\sin\frac{A}{۲}$$

$$\Rightarrow ۲\,bc\sin\frac{A}{۲}\cos\frac{A}{۲}=cd_a\sin\frac{A}{۲}+bd_a\sin\frac{A}{۲}$$

دو طرف تساوی را بر $\sin\frac{A}{۲}$ تقسیم می کنیم ، داریم :

$$۲\,bc\cos\frac{A}{۲}=\ d_a\ \times(c+b)\Rightarrow\ d_a=\frac{۲\,bc\cos\frac{A}{۲}}{b+c}$$

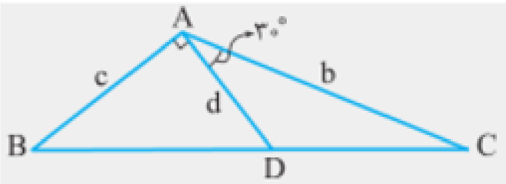
با استدلال مشابه داریم :

$$d_c=\frac{۲\,ba\cos\frac{C}{۲}}{b+a}\ \ .\ \ d_b=\frac{۲\,ac\cos\frac{B}{۲}}{a+c}$$

مثال۱۲: در مثلثی اندازه یک زاویه ۶۰ و اندازه اضلاع آن ۲۰ و ۳۰ است . طول نیمساز این زاویه را بدست آورید.

مثال۱۳ : اگر در مثلث ABC داشته باشیم : $\frac{۱}{d_a} = \frac{۱}{b} + \frac{۱}{c}$ ، اندازه زاویه A چند درجه است ؟

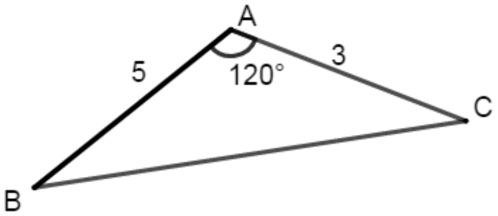
مثال۱۴ : اگر S مساحت مثلث ABC باشد ، حاصل عبارت $\frac{d(۲c+b)}{S}$ را بدست آورید.



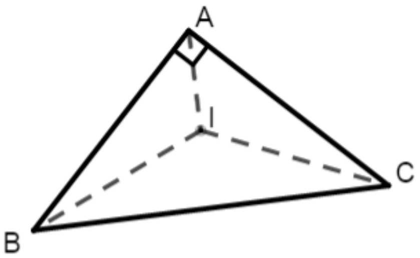
تمرین۱ : سه دایره دو به دو مماس خارج اند که شعاع های آنها ۲ ، ۳ و r است .اگر مساحت مثلثی که از وصل کردن مرکز دایره ها بوجود می آید ، $۶\sqrt{۶}$ باشد ، اندازه r را بدست آورید .

تمرین۲ : مرکز دایره محاطی مثلث ABC را به راس ها وصل می کنیم . مساحت سه مثلث بوجود آمده ۸ ، ۲۶ و ۳۰ می باشد . طول اضلاع این مثلث را بدست آورید.

تمرین۳ : روی دو ضلع مثلث ABC **مثلث متساوی الاضلاعی رسم میکنیم . مساحت مثلث** AMN **را بدست آورید.**

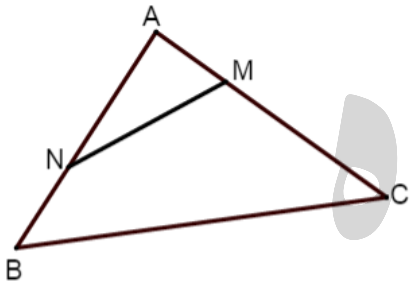


تمرین۴ : I **مرکز دایره محاطی مثلث قائم الزاویه** ABC **است. نشان دهید :**



$$\mathrm{IB} \cdot \mathrm{IC} = \mathrm{AI} \cdot \mathrm{BC}$$

قضیه ۲: با فرض دلخواه بودن دو نقطه N **و** M **، ثابت کنید:**



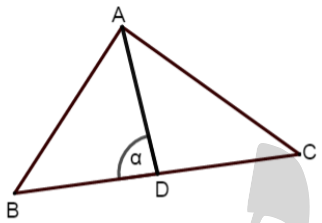
$$\frac{S_{AMN}}{S_{ABC}} = \frac{AM}{AC} \times \frac{AN}{AB}$$

مثال۱۵ : روی اضلاع چهارضلعی ABCD ، نقاط P ، N ، M و Q طوری انتخاب شده اند که:

$$\frac{CP}{CB}=\frac{1}{2} \quad . \quad \frac{AN}{AB}=\frac{1}{4} \quad . \quad \frac{AM}{AD}=\frac{1}{3} \quad . \quad \frac{CQ}{CD}=\frac{1}{6}$$

نسبت $\frac{S_{MNBPQD}}{S_{ABCD}}$ را بدست آورید .

قضیه۳: ثابت کنید در مثلث ABC داریم :



$$S_{ABC}=\frac{AD\ \times BC\ \times \sin\propto}{2}$$

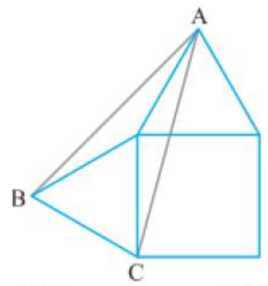
قضیه۴ : ثابت کنید "مساحت هر چهارضلعی دلخواه برابر است با : نصف حاصل ضرب دو قطر در سینوس زاویه بین آنها ."

$$S_{ABCD} = \frac{AC \times BD \times \sin \propto}{2}$$

تذکر : قضیه بالا برای چهارضلعی های مقعر هم صادق است.

مثال۱۶: مساحت چهارضلعی ABCD برابر ۲۱۶ و قطرهای آن ۱۸ و ۲۴ است. چهارضلعی که از وصل کردن وسط اضلاع چهارضلعی اولیه بوجود می آید ، چه نوع چهارضلعی است؟

مثال های بیشتر:



. در شکل زیر، طول ضلع مربع ۲ واحد است. دو مثلث متساوی‌الاضلاع بر روی اضلاع مجاور ساخته شده است. مساحت شکل ABC کدام است؟

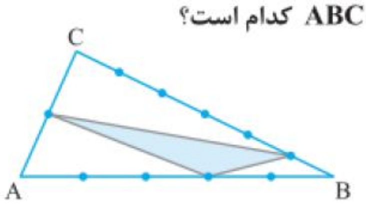
۱) $۲+\sqrt{۳}$ ۲) $۱+\sqrt{۳}$

۳) $\frac{۱}{۲}+\frac{\sqrt{۳}}{۲}$ ۴) $۱+۲\sqrt{۳}$

. در مثلث ABC ، روی ضلع AC نقطهٔ K و روی ضلع BC نقطهٔ M مفروض است. اگر $\frac{S_{K\overset{\Delta}{M}C}}{S_{AKMB}}=\frac{۵}{۶}$ و $\frac{CK}{KA}=۵$ باشد، نسبت $\frac{CM}{MB}$ کدام است؟

۱) ۵ ۲) $\frac{۵}{۶}$ ۳) $\frac{۶}{۵}$ ۴) $\frac{۱}{۵}$

. در شکل مقابل، تقسیمات روی هر ضلع با هم برابرند. نسبت مساحت مثلث رنگی به مساحت مثلث ABC کدام است؟



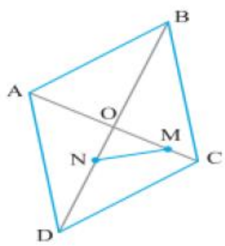
۱) $\frac{۲}{۵}$ ۲) $\frac{۱}{۴}$

۳) $\frac{۷}{۱۵}$ ۴) $\frac{۱۳}{۶۰}$

. در مثلث ABC ، زاویهٔ A منفرجه است. اگر $b=h_b$ و $a\cdot c=۲b^۲$ باشد، زاویهٔ B کدام است؟

۱) $\frac{\pi}{۲}$ ۲) $\frac{\pi}{۴}$ ۳) $\frac{\pi}{۶}$ ۴) $\frac{\pi}{۳}$

. در شکل مقابل $\frac{ON}{AC}=\frac{۱}{۴}$ است. اگر نسبت $\frac{OM}{BD}=\frac{۲}{۵}$ باشد، نسبت مساحت مثلث $\overset{\Delta}{OMN}$ به مساحت متوازی‌الاضلاع ABCD کدام است؟



۱) $\frac{۱}{۱۰}$ ۲) $\frac{۲}{۵}$

۳) $\frac{۴}{۹}$ ۴) $\frac{۲}{۹}$

. مثلث ABC به اضلاع $AB=۶$ و $AC=۴$ و $BC=۸$ مفروض است. نقطهٔ E روی AB و نقطهٔ D روی AC مفروض‌اند. اگر $AD=۲$ و $AE=۳$ باشد، مساحت مثلث ADE کدام است؟

۱) $\frac{۳\sqrt{۱۵}}{۴}$ ۲) $\frac{۳\sqrt{۵}}{۲}$

۳) $\frac{۳\sqrt{۳}}{۲}$ ۴) $\frac{۵\sqrt{۵}}{۴}$

تمرینات کتاب درسی بخش چهارم :

۱.در مثلث ABC ، $AB = ۱۰$ ، $AC = ۶$ و $\hat{A} = ۶۰^\circ$ می باشد .

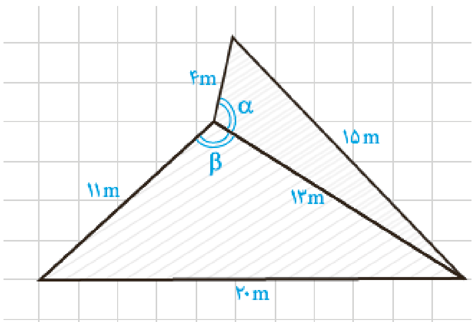
الف) طول BC را بدست آورید ؟

ب) مساحت مثلث را تعیین کنید .

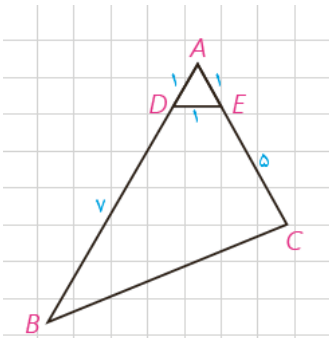
ج) مقدار $\sin B$ را پیدا کنید .

۲. دو زمین کوچک به شکل مثلث با یک دیوار به طول ۱۳متر مطابق شکل از هم جدا شده اند .ابعاد زمین ها هم در شکل مشخص شده اند. اگر با برداشتن دیوار ، دو زمین به یک زمین تبدیل شود ، مساحت آن چقدر می شود ؟

نشان دهید دیوار مشتک با اضلاع ۴ متری و ۱۱ متری زاویه های برابر می سازند .$(\alpha = \beta)$

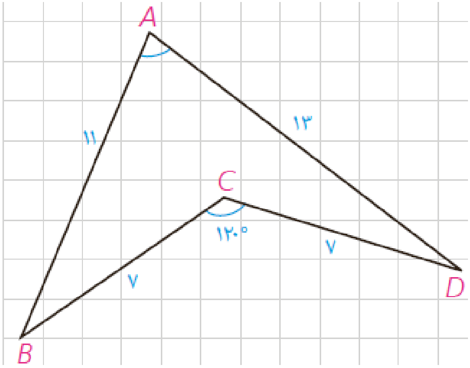


۳. در شکل مقابل ، اولا طول BC را بدست آورید .ثانیا مساحت چهارضلعی $DECB$ را بیابید.



۴. در مثلث ABC به اضلاع ۵، ۶ و ۷ سانتی متر ، نقطه ای که از اضلاع به طول های ۵ و ۶ به فاصله ۲ و ۳ سانتی متر است از ضلع بزرگ تر چه فاصله ای دارد ؟ (راهنمایی : از مساحت مثلث استفاده کنید .)

۵. در شکل ، اولا اندازه زاویه A را بدست آورید ، ثانیا مساحت چهارضلعی $ABCD$ را بیابید .(راهنمایی : B را به D وصل کنید.)

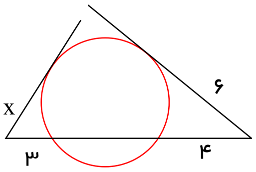


سوالات مروری سری ۱
فصل اول (دایره)

۱ اندازه مماس مشترک خارجی دو دایره به شعاع های ۱۴ و ۶ واحد برابر ۱۵ واحد است. خط المرکزین این دو دایره چند واحد است؟

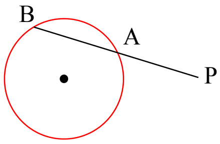
۱) $12\sqrt{2}$ ۲) $7\sqrt{6}$ ۳) ۱۷ ۴) ۱۸

۲ در شکل مقابل اندازه x چند واحد است؟



۱) $3\sqrt{2}$ ۲) $2\sqrt{5}$ ۳) $2\sqrt{6}$ ۴) ۵

۳ فاصلهٔ نزدیکترین نقطه از دایره به شعاع ۵ واحد تا نقطه مفروض P برابر ۸ واحد است. قاطع PAB نسبت به دایره طوری رسم شده است که $PA-AB=2$ اندازه AB چقدر است؟



۱) ۵ ۲) ۶ ۳) ۷ ۴) ۹

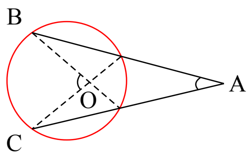
۴ در دو دایره متقاطع به مراکز O، O' و شعاع های ۳ و ۴ واحد، فاصله نقطه تلاقی دو دایره از وسط OO' برابر $\frac{1}{2}OO'$ می باشد، اندازه مماس مشترک محدود به دو نقطه تماس این دو دایره چند واحد است؟

۱) ۴ ۲) $2\sqrt{5}$ ۳) $2\sqrt{6}$ ۴) ۵

۵ از نقطه M واقع در خارج دایره ای به شعاع ۴ واحد، دو مماس MB, MA بر دایره رسم شده است. اگر فاصله نقطه M تا نزدیکترین نقاط دایره $4(\sqrt{2}-1)$ باشد، فاصله مرکز دایره از وتر AB کدام است؟

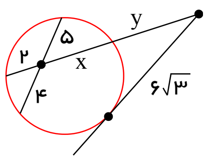
۱) $\sqrt{2}$ ۲) ۳ ۳) $2\sqrt{2}$ ۴) ۲

۶ در شکل مقابل $\hat{A}=27^\circ$ و $\hat{O}=71^\circ$ کمان BC چند درجه است؟



۱) 98° ۲) 100° ۳) 102° ۴) 104°

۷ در شکل مقابل مقدار y کدام است؟



۱) ۶ ۲) ۷٫۵ ۳) ۸ ۴) ۹

۸ در متوازی الاضلاع $ABCD$ دایره محیطی مثلث ACD امتداد ضلع BC را درنقطه M قطع کرده است. مثلث ABM کدام نوع است؟

۱) متشابه ACD ۲) متساوی الساقین ۳) متساوی الاضلاع ۴) قائم الزاویه

۹ شعاع دو دایره‌ی خارج هم به ترتیب ۷٫۵, ۲۲٫۵ سانتی متراست. اگرزاویه‌ی بین مماس داخل وخط المرکزین دو دایره ۳۰ درجه باشد، طول خط المرکزین دو دایره چند سانتی‌متراست؟

۱) ۵۵ ۲) ۵۷٫۵ ۳) ۶۰ ۴) ۶۲٫۵

۱۰) نقطه C بر روی وتر AB به طول ۹ واحد از دایره‌ای چنان قرار دارد که آن وتر را به نسبت ۱ و ۲ تقسیم کرده است. طول کوتاه‌ترین وتر از دایره گذرنده بر نقطه C کدام است؟

۱) ۸ ۲) $۵\sqrt{۳}$ ۳) $۶\sqrt{۲}$ ۴) $۴\sqrt{۵}$

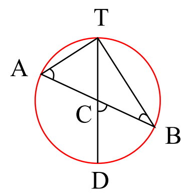
۱۱) طول مماس مشترک خارجی دو دایره به شعاع‌های ۱۱ و ۳ سانتی‌متر برابر $۳\sqrt{۳۳}$ سانتی‌متر است. کمترین فاصله نقاط این دو دایره از یکدیگر چند سانتی‌متر است؟

۱) ۳ ۲) ۴ ۳) ۵ ۴) ۶

۱۲) ذوزنقه متساوی الساقین به طول قاعده‌های ۶ و $\frac{۳۲}{۳}$ واحد بردایره‌ای محیط است، کوتاهترین فاصله راس ذوزنقه تا نقاط دایره چند واحد است؟

۱) $\frac{۱}{۲}$ ۲) $\frac{\sqrt{۳}}{۲}$ ۳) ۱ ۴) $\sqrt{۳}$

۱۳) در شکل مقابل TD قطر دایره است و $\hat{A} = ۶۵^\circ$ و $\hat{B} = ۳۵^\circ$ زاویه $\hat{C}$ چند درجه است؟



۱) ۶۰° ۲) ۶۱°

۳) ۶۲° ۴) ۶۳°

۱۴) طول مماس مشترک خارجی دو دایره مماس $\sqrt{۲}$ برابر شعاع دایره ی بزرگتر است. شعاع دایره بزرگتر چند برابر شعاع دایره کوچکتر است؟

۱) $\sqrt{۲}$ ۲) ۱٫۵ ۳) $\sqrt{۳}$ ۴) ۲

۱۵) در دایره‌ای به مساحت $۴\pi\sqrt{۳}$ مثلث متساوی الاضلاعی محاط شده است، مساحت مثلث کدام است؟

۱) ۶ ۲) ۷٫۵ ۳) ۸ ۴) ۹

۱۶) شعاع دایره‌ی محاطی بیرونی مثلث متساوی الاضلاع به ضلع $۸\sqrt{۳}$ کدام است؟

۱) ۸۱ ۲) ۹ ۳) ۱۲ ۴) ۱۵

۱۷) در دایره‌ای به مساحت $۴\pi\sqrt{۳}$ مثلث متساوی الاضلاعی محاط شده است، مساحت مثلث کدام است؟

۱) ۶ ۲) ۷٫۵ ۳) ۸ ۴) ۹

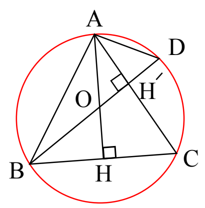
۱۸) یک ذوزنقه ی متساوی الساقین بر دایره‌ای به شعاع ۳ محیط است، اگر مساحت ذوزنقه ۴۵ باشد، طول ساق آن کدام است؟

۱) ۷ ۲) ۷٫۵ ۳) ۸ ۴) ۸٫۵

۱۹) در متوازی الاضلاع $ABCD$ طول BC برابر با a و ضلع AB ثابت است، اگر زاویه‌ی A تغییر کند مکان هندسی وسط DC کدام است؟

۱) قسمتی از دایره به قطر AB ۲) دایره به مرکز وسط AB و شعاع a ۳) خطی موازی AB ۴) دایره به مرکز A و شعاع AB

۲۰) در شکل رو به رو، O محل تلاقی ارتفاع‌های مثلث ABC است. زاویه‌ی $A\hat{O}D$ برابر کدام است؟



۱) $O\hat{B}C$ ۲) $C\hat{A}D$

۳) $O\hat{A}C$ ۴) $A\hat{D}O$

۲۱) دو دایره به شعاع‌های ۴ و ۱۰٫۵ واحد مماس برون‌اند. از مرکز دایره کوچک‌تر، مماس بر دایره بزرگ‌تر رسم می‌کنیم. طول این قطعه مماس چقدر است؟

۱) ۸ ۲) $۴\sqrt{۵}$ ۳) $۴\sqrt{۶}$ ۴) ۱۰

۲۲) در یک دایره به مرکز O، شعاع OA را به اندازه خود تا نقطه B امتداد می‌دهیم. از نقطه B بر مماس دلخواه دایره عمود BD را فرود می آوریم. اگر $A\widehat{D}B = 34^\circ$ باشد، زاویه $O\widehat{A}D$ چند درجه است؟

۱) ۶۸ ۲) ۷۳ ۳) ۱۰۲ ۴) ۱۴۶

۲۳) در مثلث متساوی‌الساقین ABC $(AB = AC)$ نقطه O در امتداد AC مرکز دایره‌ای است که در نقطه B بر ضلع AB مماس است و امتداد BC این دایره را در D قطع کرده است. مثلث OCD چگونه است؟

۱) متساوی‌الساقین ۲) قائم‌الزاویه ۳) قائم‌الزاویه و متساوی‌الساقین ۴) غیر مشخص

۲۴) دو دایره نامساوی به مرکزهای O و O' مماس خارج‌اند. دایره‌ای به قطر OO'، با مماس مشترک خارجی این دو دایره، کدام وضعیت را دارد؟

۱) متقاطع ۲) مماس ۳) متخارج ۴) نامشخص

۲۵) در یک ذوزنقه محیط بر دایره، طول خط واصل بین وسط‌های دو ساق آن ۱۲ واحد است. محیط ذوزنقه، کدام است؟

۱) ۳۶ ۲) ۴۴ ۳) ۴۶ ۴) ۴۸

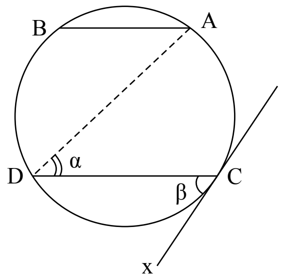
۲۶) چهارضلعی $ABCD$ محاط در یک دایره است. اگر AB دورترین وتر و BC نزدیک‌ترین وتر نسبت به مرکز این دایره باشند، کدام رابطه بین زاویه‌ها ممکن است برقرار <u>نباشد</u>؟

۱) $\widehat{D} > \widehat{C}$ ۲) $\widehat{B} > \widehat{C}$ ۳) $\widehat{A} > \widehat{B}$ ۴) $\widehat{B} > \widehat{D}$

۲۷) در مثلث متساوی‌الساقین، اندازه‌ی ارتفاع وارد بر قاعده ۸ و شعاع دایره‌ی محاطی داخلی آن ۳ واحد است، طول قاعده‌ی این مثلث، کدام است؟

۱) ۱۰ ۲) ۱۲ ۳) ۱۴ ۴) ۱۶

۲۸) در شکل زیر، وتر AB برابر شعاع دایره و $AB||CD$، زاویهٔ $\beta = 2\alpha$ و CX مماس بر دایره است. کمان $\widehat{BD}$ چند درجه است؟



۱) 50°

۲) 60°

۳) 70°

۴) 75°

۲۹) یک ذوزنقهٔ متساوی‌الساقین، با کدام شرط قابل محیط بر دایره است؟

۱) دو قطر عمود بر هم ۲) یکی از قاعده‌های ذوزنقه، برابر یکی از ساق‌ها

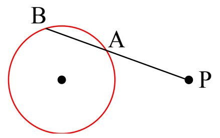
۳) خط واصل وسط دو ساق، گذرا از محل تلاقی قطرها ۴) طول پاره‌خط واصل وسط دو ساق، برابر اندازهٔ یکی از ساق‌ها

۳۰) اگر مساحت شش ضلعی منتظم محاط در یک دایره $6\sqrt{3}$ باشد. آنگاه مساحت شش ضلعی منتظم محیط بر این دایره، چند برابر $\sqrt{3}$ است؟

۱) ۷/۲ ۲) ۷/۵ ۳) ۸ ۴) ۹

سوالات مروری سری ۲
فصل اول (دایره)

۱) بیشترین فاصله‌ی نقطه‌ی P تا یک دایره، سه برابر شعاع دایره است. از این نقطه قاطع PAB نسبت به دایره رسم شده است. اگر کمان AB برابر ۶۰ درجه باشد، اندازه‌ی PA چند برابر شعاع دایره است؟



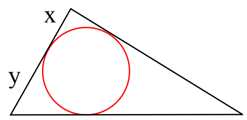
① $\frac{۱}{۲}(\sqrt{۱۱}-۱)$ ② $\frac{۱}{۲}(\sqrt{۱۳}-۱)$

③ $\sqrt{۱۱}-۲$ ④ $\sqrt{۱۳}-۲$

۲) دو دایره به شعاع‌های ۲ و ۵ واحد مماس داخلی هستند. چند وتر به طول $۴\sqrt{۶}$ در دایره ی بزرگ تر می‌توان رسم کرد که بر دایره‌ی کوچک‌تر مماس باشند؟

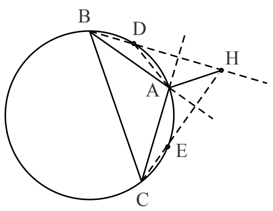
① ۱ ② ۲ ③ ۳ ④ ۴

۳) دایره‌ی محاطی داخلی یک مثلث به طول اضلاع ۱۳ و ۹ و ۸، در نقطه‌ی تماس، کوچک‌ترین ضلع را به ۲ قطعه تقسیم می‌کند. نسبت آن دو قطعه کدام است؟



① $\frac{۱}{۳}$ ② $\frac{۲}{۵}$ ③ $\frac{۳}{۷}$ ④ $\frac{۲}{۳}$

۴) در شکل مقابل، نقطه ی H محل تلاقی ارتفاعات مثلث ABC است. $A\hat{H}D$ با کدام زاویه برابر است؟



① $C\hat{A}E$ ② $A\hat{B}C$

③ $A\hat{D}H$ ④ $A\hat{H}C$

۵) مساحت یک مثلث متساوی‌الاضلاع $۶\sqrt{۳}$ واحد مربع است. شعاع دایره محاطی داخلی آن کدام است؟

① $\sqrt{۲}$ ② $\sqrt{۳}$ ③ ۱ ④ ۲

۶) در مثلث متساوی‌الاضلاع به طول ضلع $۲\sqrt{۳}$ ، فاصله مرکزهای دو دایره محاطی خارجی و محیطی آن کدام است؟

① ۲ ② ۳ ③ ۴ ④ ۵

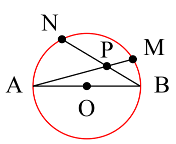
۷) طول مماسی که از نقطه A بر دایره رسم شود ۹ واحد است. اگر نزدیکترین نقطه دایره تا نقطه A برابر ۵ واحد باشد. شعاع دایره کدام است؟

① ۵٫۴ ② ۵٫۶ ③ ۶٫۴ ④ ۷٫۲

۸) چهار ضلعی با طول اضلاع متوالی a ,۹ ,۱۲ ,۷ واحد بر دایره‌ای محیط شده است. a کدام است؟

① ۶ ② ۵ ③ ۴ ④ ۸

۹) در دایره‌ای به شعاع ۳ واحد، دو وتر AM و BN یکدیگر را در نقطه P قطع کرده‌اند (AB قطر دایره است). حاصل $BP \times BN + AP \times AM$ کدام است؟



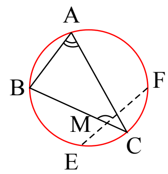
① ۱۶ ② ۲۷

③ ۳۶ ④ ۸۱

۱۰) نقطه A داخل دایره‌ای به شعاع ۱۷ واحد به فاصله ۸ واحد از مرکز آن داده شده است. تفاضل کوچکترین وتر از بزرگترین وتر که از نقطه A رسم شوند کدام است؟

۱) ۳　　۲) ۴　　۳) ۵　　۴) ۶

۱۱) در شکل مقابل نقطه C وسط کمان EF است، اگر $\widehat{BE} = ۷۰^\circ$ باشد، اندازه $\hat{A} + \hat{M}$ چند درجه است؟



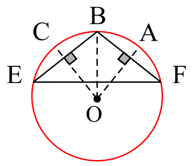
۱) ۱۶۵°　　۲) ۱۸۰°

۳) ۱۹۰°　　۴) ۲۲۵°

۱۲) دو دایره مماس داخلی با نسبت شعاع‌های $\frac{۱}{۲}$ می‌باشد. از مرکز دایره کوچکتر بر خط المرکزین آنها عمودی رسم شده و در یک طرف دو دایره را در A و B قطع کرده است. اگر $AB = ۳ - \sqrt{۳}$ باشد شعاع دایره بزرگتر کدام است؟

۱) $۲\sqrt{۳}$　　۲) $۳\sqrt{۳}$　　۳) $۴\sqrt{۳}$　　۴) $\sqrt{۶}$

۱۳) اگر $A\hat{O}B = \alpha$ و $B\hat{O}C = \beta$ باشد، در دایره به شعاع واحد اندازه EF برابر کدام است؟



۱) $۲\cos(\alpha+\beta)$　　۲) $\sin(\alpha+\beta)$

۳) $۲\sin(\alpha+\beta)$　　۴) $\cos(\alpha+\beta)$

۱۴) در مثلثی به اضلاع قائم ۲ و $۲\sqrt{۳}$ واحد دو دایره به قطر این اضلاع رسم شده است. زاویه بین مماس‌ها بر دو دایره مفروض در نقطه تلاقی آنها چند درجه است؟

۱) ۹۰　　۲) ۷۵　　۳) ۶۰　　۴) ۴۵

۱۵) پاره‌خط AC به طول ۱۲ واحد مفروض است. اندازه وتری از دایره به شعاع AC و مماس بر دایره به همان مرکز و به قطر AC کدام است؟

۱) ۱۲　　۲) $۸\sqrt{۳}$　　۳) $۱۲\sqrt{۳}$　　۴) ۱۶

۱۶) در مثلثی به اضلاع ۱۴، ۹، ۷ واحد فاصله رأس زاویه کوچکتر مثلث از نقطه تماس دایره محاطی داخلی آن کدام است؟

۱) ۹　　۲) ۸　　۳) ۷　　۴) ۶

۱۷) دو دایره به شعاع‌های ۵ و ۹ متر هم مرکز هستند طول وتر از دایره بزرگتر مماس بر دایره کوچکتر کدام است؟

۱) $۸\sqrt{۲}$　　۲) $۴\sqrt{۱۴}$　　۳) $۶\sqrt{۷}$　　۴) $۴\sqrt{۶}$

۱۸) نزدیکترین فاصله A تا دایره به شعاع ۶ واحد برابر ۳ واحد است. طول قطعه مماس مرسوم از A به دایره کدام است؟

۱) $۴\sqrt{۵}$　　۲) $۳\sqrt{۲}$　　۳) $۴\sqrt{۲}$　　۴) $۳\sqrt{۵}$

۱۹) در دو دایره متقاطع طول خط‌المرکزین ۴ واحد و نقطه M محل تلاقی وتر مشترک و مماس مشترک آنها است. دایره کوچکتر به شعاع ۳ واحد و فاصله M از نقطه تماس با آن $\sqrt{۳}$ است. شعاع دایره بزرگتر کدام است؟

۱) $۳\sqrt{۲}$　　۲) ۴　　۳) ۵　　۴) ۶

۲۰) در مثلثی به اضلاع $(۵, ۶, ۷)$ فاصله مرکز دایره محیطی از بزرگترین ضلع کدام است؟

۱) $\frac{۶\sqrt{۳}}{۷}$　　۲) $\frac{۷\sqrt{۶}}{۱۲}$　　۳) $\frac{۷\sqrt{۶}}{۲۴}$　　۴) $\frac{۳۰\sqrt{۲}}{۷}$

۲۱) در دایره‌ای دو وتر به طول‌های ۱۱ و ۱۱٫۵ واحد در نقطه M متقاطع هستند فاصله M از انتهای وتر کوچکتر ۵ واحد است. فاصله M از انتهای وتر بزرگتر کدام است؟

۱) ۳　　۲) ۴　　۳) ۶　　۴) $۳\sqrt{۲}$

۲۲) در متوازی الاضلاع $ABCD$ دایره گذرا بر سه رأس ABC امتداد ضلع DA را در نقطه M قطع می‌کند. نوع مثلث MCD کدام است؟

۱) متساوی الساقین ۲) متساوی الاضلاع ۳) قائم الزاویه ۴) غیر مشخص

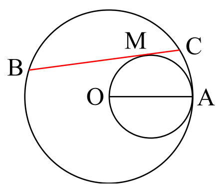
۲۳) در دو دایره به مرکزهای O و O' و شعاع‌های ۳ و ۵ واحد اگر $OO' = ۱۰$ باشد فاصله نقطه تلاقی مماس مشترک‌های خارجی از مرکز دایره کوچکتر کدام است؟

۱) ۷٫۵ ۲) ۹ ۳) ۱۲ ۴) ۱۵

۲۴) دو دایره متقاطع در نقطه A مشترک‌اند. خط گذرا بر A دو دایره مفروض را در B و C قطع می‌کند. مماس‌ها بر هر دایره در B و C در نقطه M متقاطع‌اند. در مثلث MBC با چرخش خط قاطع، کدام جزء ثابت می‌ماند؟

۱) MA ۲) محیط ۳) مساحت ۴) زاویه $\widehat{BMC}$

۲۵) در دایره‌ای به شعاع OA وتر BC مماس بر دایره‌ای به قطر OA رسم شده است. مقدار $MC \times MB$، برابر کدام است؟

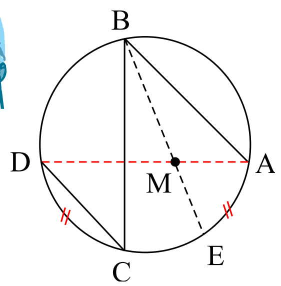


۱) $MO^۲$ ۲) $MA^۲$ ۳) $OA^۲$ ۴) $MA \cdot MO$

۲۶) دایره‌ای بر دو نقطه‌ی $(۲ , ۰)$ و $(۰ , ۴)$ گذشته و بر محور x ها مماس است. این دایره محور y ها را در نقطه‌ی دیگر، با کدام عرض قطع می‌کند؟

۱) ۵ ۲) ۶ ۳) ۷ ۴) ۸

۲۷) در شکل مقابل $AB = ۶$، $BC = ۸$، $CD = ۳$ و $\overset{\frown}{AE} = \overset{\frown}{CD}$، اندازهٔ AM، کدام است؟



۱) ۲
۲) ۲٫۲۵
۳) ۲٫۵
۴) ۲٫۷۵

۲۸) مربع $ABCD$ به ضلع ۴ واحد، مفروض است. شعاع دایره‌ی گذرا بر دو راس A و B و مماس بر ضلع CD کدام است؟

۱) ۲٫۲۵ ۲) ۲٫۵ ۳) $۲\sqrt{۲}$ ۴) ۳

۲۹) چهار ضلعی $ABCD$ محیط بر یک دایره است. اگر AB کوچکترین ضلع آن باشد، کدام نابرابری، همواره درست است؟

۱) $\widehat{C} > \widehat{A}$ ۲) $\widehat{B} < \widehat{A}$ ۳) $\widehat{D} < \widehat{C}$ ۴) $\widehat{D} < \widehat{B}$

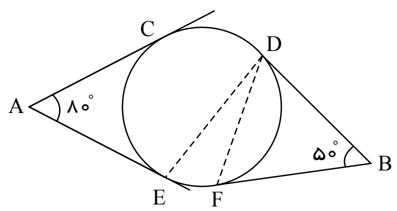
۳۰) در مثلث ABC $(AB = AC)$، دایره‌ای در B و C بر ساق‌ها مماس است. اگر $BC = ۶$ و ارتفاع $AH = ۴$ باشد، شعاع این دایره، کدام است؟

۱) ۳٫۲۵ ۲) ۳٫۵ ۳) ۳٫۷۵ ۴) ۴٫۵

۳۱) در یک ذوزنقهٔ متساوی‌الساقین، از برخورد نیمسازهای داخلی آن، دقیقاً کدام چهار ضلعی، حاصل می‌شود؟

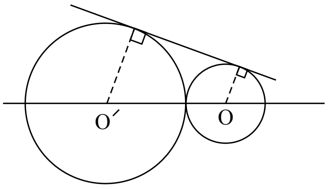
۱) محاطی و محیطی ۲) فقط محاطی ۳) فقط محیطی ۴) نه محاطی و نه محیطی

۳۲) در شکل زیر، اضلاع زاویه‌های A و B بر دایره مماس‌اند، اگر وتر CD برابر شعاع دایره باشد. زاویهٔ $E\hat{D}F$ چند درجه است؟



۱) ۲۵
۲) ۳۰
۳) ۳۵
۴) ۴۰

۳۳ دو دایره به شعاع‌های ۹ و ۴ واحد مماس برهم‌اند. دایره به قطر OO' با مماس مشترک خارجی در نقطهٔ تماس M مشترک‌اند. فاصلهٔ M از نقطهٔ تماس دو دایره، کدام است؟



۱) ۶
۲) ۶٫۵
۳) ۷
۴) ۷٫۵

۳۴ در مثلث ABC با اضلاع $AB=۵$ و $AC=۷$ و $BC=۸$ واحد، نیمساز داخلی زاویهٔ A، نیمسازهای زاویهٔ داخلی و خارجی B را در O و O' قطع می‌کند. اندازهٔ تصویر قائم OO'، بر روی BC کدام است؟

۱) ۱
۲) ۱٫۵
۳) ۲
۴) ۲٫۵

سوالات مروری‌سری ۱

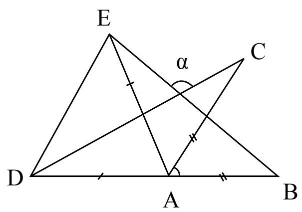
فصل دوم تبدیلات

۱) در صفحه‌ای خط d و دو نقطه‌ی A و B در یک طرف خط مفروض‌اند. برای یافتن نقطه‌ای بر روی خط d که مجموع فاصله‌های آن از دو نقطه‌ی A و B کمترین مقدار را داشته باشند، کدام تبدیل هندسی به کار می‌رود؟

۱) بازتاب ۲) انتقال ۳) دوران ۴) تجانس

۲) تحت یک تبدیل، خط مفروض، با تبدیل یافته آن، موازی است. در کدام حالت، تبدیل منحصر به فرد است؟

۱) انتقال ۲) دوران ۳) بازتاب نسبت به نقطه ۴) بازتاب نسبت به خط



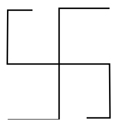
۳) در شکل مقابل $AB = AC$، $AD = AE$، $\widehat{CAB} = 50^\circ$ و $\widehat{AED} = 65^\circ$ زاویهٔ α چند درجه است؟

۱) 115° ۲) 120°
۳) 125° ۴) 130°

۴) در تجانس به مرکز O و نسبت K، نقطه‌ی M' مجانس نقطه‌ی M می‌باشد با همین مرکز و کدام نسبت تجانس، نقطه‌ی M مجانس M' خواهد بود؟

۱) $2K$ ۲) K ۳) $\frac{1}{K}$ ۴) $\frac{K}{2}$

۵) شکل زیر چند محور تقارن دارد؟



۱) ۰ ۲) ۲ ۳) ۴ ۴) ۶

۶) در دوران به مرکز O و زاویه‌ی 68° در صفحه‌ی خط d و تبدیل یافته‌اش در P متقاطعند. زاویه‌ی OP با خط d کدام است؟

۱) 68° ۲) 56° ۳) 48° ۴) 22°

۷) اگر اوساط اضلاع مثلثی را به هم وصل کنیم مثلثی حاصل می‌شود که با مثلث اصلی متجانس است مرکز تجانس کدام است؟

۱) نقطه هم رأسی سه ارتفاع مثلث اصلی ۲) نقطه تلاقی سه میانه مثلث اصلی
۳) نقطه هم رأسی سه نیمساز مثلث اصلی ۴) نقطه تلاقی سه عمود منصف مثلث اصلی

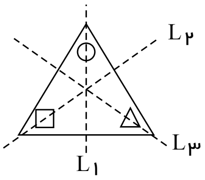
۸) O و O' مرکز دو دایره به شعاع ۳,۵ سانتی‌متر هستند. اگر $OO' = 12$ سانتی‌متر باشد فاصله‌ی مرکز تجانس معکوس این دو دایره از مرکز دایره به شعاع بزرگ‌تر چند سانتی‌متر است؟

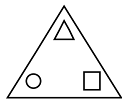
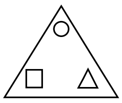
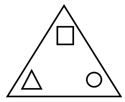
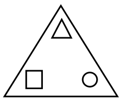
۱) ۷ ۲) ۷٫۵ ۳) ۸ ۴) ۸٫۵

۹) مجانس مربع $ABCD$ با نسبت تجانس $-\frac{1}{2}$ که مرکز تجانس آن مرکز مربع است کدام شکل است؟

۱) لوزی است درون مربع $ABCD$ ۲) لوزی است خارج مربع $ABCD$ ۳) مربعی است خارج مربع $ABCD$ ۴) مربعی است داخل مربع $ABCD$

۱۰) اگر قرینه‌ی شکل مقابل را متوالیاً نسبت به محورهای L_1 و L_2 و L_3 به دست آوریم نتیجه ترکیب این سه تقارن محوری کدام است؟



۱) 
۲) 
۳) 
۴) 

۱۱) کدام تبدیل زیر نقطه‌ی ثابت ندارد؟

۱) دوران ۲) انتقال ۳) بازتاب نسبت به یک نقطه ۴) تجانس

۱۲) دو خط Δ و Δ' و نقطه‌ی A خارج آن ها مفروض‌اند. برای رسم مثلث قائم‌الزاویه متساوی‌الساقینی با رأس A که دو سر قاعده‌ی آن بر روی هر دو خط مفروض اند کدام تبدیل به کار می‌رود؟

۱) تجانس ۲) دوران ۳) بازتاب و تقارن ۴) انتقال

۱۳) در یک صفحه، دو دایره به شعاع‌های متفاوت در نقطه‌ی A متقاطع‌اند. با استفاده از کدام تبدیل می‌توان از نقطه‌ی A خطی گذراند که در این دو دایره، وترهای مساوی ایجاد کند؟

۱) انتقال ۲) دوران ۹۰ درجه ۳) بازتاب نسبت به خط ۴) بازتاب نسبت به نقطه

۱۴) کدام یک از تبدیل‌های زیر ایزومتری <u>نیست</u>؟

۱) تجانس ۲) بازتاب ۳) تقارن ۴) انتقال

۱۵) با استفاده از کدام تبدیل هندسی، داخل مثلث مفروض می‌توان مربعی محاط کرد. که یک ضلع آن بر روی ضلع مثلث و دو رأس دیگر بر روی دو ضلع این مثلث قرار گیرند؟

۱) دوران ۲) بازتاب ۳) انتقال ۴) تجانس

۱۶) دو خط متقاطع d و d' و پاره‌خط AB در صفحه‌ی آنها مفروض است. برای رسم پاره‌خطی موازی و مساوی AB که دو سر آن بر روی این دو خط باشد، کدام تبدیل هندسی به کار می‌رود؟

۱) بازتاب ۲) انتقال ۳) دوران ۴) تجانس

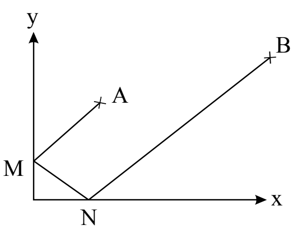
۱۷) نقطهٔ A در صفحه دو خط متقاطع d و d' است. در رسم مثلث متساوی‌الاضلاع به رأس A، که دو رأس دیگر آن بر روی هر یک از دو خط مفروض باشد، کدام تبدیل هندسی به‌کار می‌رود؟

۱) انتقال ۲) بازتاب ۳) تجانس ۴) دوران

۱۸) در رسم بزرگترین مربع ممکن داخل مثلث ABC، به‌طوری که یک ضلع مربع منطبق بر ضلع BC باشد. از کدام تبدیل هندسی، استفاده می‌شود؟

۱) انتقال ۲) تجانس ۳) بازتاب ۴) دوران

۱۹) نقاط $A\begin{vmatrix}3\\5\end{vmatrix}$ و $B\begin{vmatrix}9\\11\end{vmatrix}$ در صفحهٔ محورهای مختصات مفروض‌اند، دو نقطهٔ M و N همواره روی دو محور می‌لغزند. کمترین اندازهٔ خط شکستهٔ $AMNB$، کدام است؟



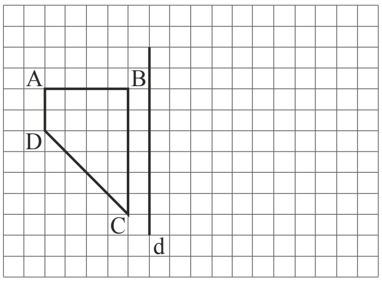
۱) ۱۸ ۲) ۱۹ ۳) ۲۰ ۴) ۲۱

سوالات مروری فصل دوم سری ۲
(تبدیلات هندسی)

۱ ترکیبی از کدام دو تبدیل زیر، ایزومتری نیست ولی شیب خط ها را حفظ می کند؟

۱) انتقال و بازتاب نسبت به خط ۲) بازتاب نسبت به نقطه و دوران ۳) تجانس و بازتاب نسبت به خط ۴) بازتاب نسبت به نقطه و تجانس

۲ بازتاب شکل زیر را نسبت به خط d در نظر بگیرید. در این تبدیل، شیب کدام پاره‌خط با شیب پاره‌خط متناظر در تصویر آن برابر نمی‌باشد؟



۱) AB

۲) BC

۳) CD

۴) DA

۳ در مثلث ABC، $\hat{A} = \frac{۳}{۲}B = ۳\hat{C}$ و $BC = ۱۲$ است. اگر مثلث $A'B'C'$ تبدیل یافته $A\overset{\Delta}{B}C$ تحت تبدیل طولپای T باشد، مساحت مثلث $A'B'C'$ کدام است؟

۱) $۳۶\sqrt{۲}$ ۲) $۱۸\sqrt{۲}$ ۳) $۳۶\sqrt{۳}$ ۴) $۱۸\sqrt{۳}$

۴ در مثلث ABC، $BC = ۴$، $\hat{B} = ۱۵^\circ$، $\hat{C} = ۷۵^\circ$ و AH ارتفاع وارد بر ضلع BC می‌باشد. اگر H' و H'' به‌ترتیب بازتاب یافتهٔ نقطهٔ H نسبت به AB و AC باشند، اندازهٔ $H'H''$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۴ ۴) ۸

۵ دو خط عمود بر هم d و d' مفروض‌اند. نقاط صفحه را ابتدا نسبت به خط d و سپس تصاویر آن‌ها را نسبت به d' بازتاب می‌دهیم. اگر ترکیب این دو بازتاب را یک تبدیل فرض کنیم، کدام گزاره در مورد این تبدیل همواره درست است؟

۱) این تبدیل، شیب خطوط و جهت اشکال را حفظ می‌کند. ۲) این تبدیل، شیب خطوط و جهت اشکال را حفظ نمی‌کند.

۳) این تبدیل، شیب خطوط را حفظ کرده ولی جهت اشکال را حفظ نمی‌کند. ۴) این تبدیل، جهت اشکال را حفظ کرده ولی شیب خطوط را حفظ نمی‌کند.

۶ نقطهٔ A درون زاویه‌ای به اندازهٔ ۴۵ درجه قرار دارد. اگر فاصلهٔ A تا رأس زاویه برابر یک واحد و A' و A'' تصاویر نقطهٔ A در بازتاب نسبت به اضلاع زاویه باشند، آن‌گاه طول پاره‌خط $A'A''$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) $\sqrt{۲}$ ۳) ۲ ۴) $۲\sqrt{۲}$

۷ مثلث ABC را با بردار $\overrightarrow{CC'}$ انتقال می‌دهیم تا بر مثلث $A'B'C'$ تصویر شود. اگر C' روی ضلع AC و $CC' = ۳AC'$ باشد، اندازهٔ مساحت ناحیهٔ مشترک بین این دو مثلث چه کسری از مساحت مثلث $A'B'C'$ است؟

۱) $\frac{۱}{۳}$ ۲) $\frac{۱}{۴}$ ۳) $\frac{۱}{۹}$ ۴) $\frac{۱}{۱۶}$

۸ یک هشت‌ضلعی منتظم را حول مرکز دایرهٔ محیطی آن و با اندازهٔ کوچک‌ترین زاویهٔ دوران ممکن (α)، دوران می‌دهیم تا بر خودش منطبق شود. تعداد نقاط ثابت این تبدیل و اندازهٔ زاویهٔ دوران کدام است؟ $(\alpha > ۰)$

۱) یک نقطه - ۲۲٫۵ درجه ۲) یک نقطه - ۴۵ درجه ۳) بی‌شمار نقطه - ۲۲٫۵ درجه ۴) بی‌شمار نقطه - ۴۵ درجه

۹) عکس کدام گزاره همواره برقرار است؟

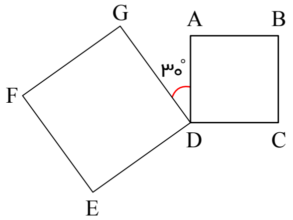
(۱) اگر دو شکل متجانس باشند، آنگاه متشابه‌اند.

(۲) اگر تبدیلی شیب خطوط را حفظ کند، آن‌گاه جهت شکل را حفظ می‌کند.

(۳) اگر تبدیلی طولپا باشند، آنگاه اندازهٔ زاویه‌ها را حفظ می‌کند.

(۴) اگر تبدیلی همانی باشد، آنگاه تمام نقاط صفحه، نقطهٔ ثابت آن تبدیل هستند.

۱۰) در شکل زیر، $ABCD$ و $DEFG$ مربع هستند. اگر پاره‌خط AE و CG دوران یافتهٔ یکدیگر باشند، آنگاه مرکز این دوران و اندازهٔ زاویهٔ دوران کدام می‌تواند باشد؟



(۱) محل تقاطع AC و GE - ۹۰ درجه

(۲) محل تقاطع AC و GE - ۱۲۰ درجه

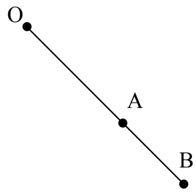
(۳) محل تقاطع عمود منصف‌های AC و GE - ۹۰ درجه

(۴) محل تقاطع عمود منصف‌های AC و GE - ۱۲۰ درجه

۱۱) دایرهٔ C را در تجانسی با نسبت ۳ بر دایرهٔ C' تصویر می‌کنیم. اگر C و C' مماس داخل و فاصلهٔ مراکز آن‌ها برابر ۴ باشد. مساحت ناحیهٔ محدود بین دو دایره چقدر است؟

(۱) ۱۴π (۲) ۱۶π (۳) ۲۸π (۴) ۳۲π

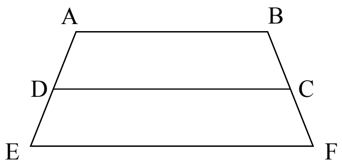
۱۲) اگر نقاط A' و B' به ترتیب مجانس‌های دو نقطهٔ A و B در تجانس به مرکز O و نسبت $K = \frac{۳}{۴}$ باشند و $AB = ۱۲$، آنگاه فاصلهٔ دو نقطهٔ A' و B' کدام است؟



(۱) ۹ (۲) ۶

(۳) ۸ (۴) ۱۲

۱۳) در شکل مقابل ذوزنقهٔ $ABCD$ با تجانس بر ذوزنقهٔ $CDEF$ تصویر می‌شود. اگر $AB = ۴$ و $EF = ۹$ باشد، آنگاه مرکز و نسبت این تجانس کدام است؟



(۱) محل برخورد عمودمنصف‌های AE و BF، $K = \frac{۹}{۴}$

(۲) محل برخورد امتدادهای AE و BF، $K = \frac{۹}{۴}$

(۳) محل برخورد عمودمنصف‌های AE و BF، $K = \frac{۳}{۲}$

(۴) محل برخورد امتدادهای AE و BF، $K = \frac{۳}{۲}$

۱۴) نقطهٔ A و خط d به فاصلهٔ واحد از آن مفروض است. اگر تبدیل S، بازتاب نسبت به خط d باشد، فاصلهٔ نقطهٔ A از $S(S(S(A)))$ کدام است؟

(۱) صفر (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) ۳

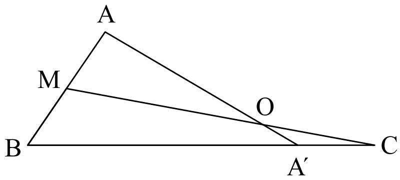
۱۵) خط L روی نیمساز زاویهٔ بین دو خط عمود بر هم d و d' واقع است. خط L را با برداری به اندازهٔ یک واحد در راستای نیمساز دیگر زاویهٔ بین d و d' انتقال می‌دهیم. مساحت محصور بین تصویر L و خطوط d و d' کدام است؟

(۱) ۱ (۲) $\sqrt{۲}$ (۳) ۲ (۴) $۲\sqrt{۲}$

۱۶) خط d را با بردار انتقالی به طول یک واحد که زاویهٔ خط و بردار ۶۰ درجه است، بر خط d' و سپس خط d را با دوران ۱۸۰ درجه به مرکز نقطه‌ای روی خط d'، بر خط d'' تصویر می‌کنیم. فاصلهٔ d و d'' کدام است؟

(۱) ۰٫۵ (۲) ۱ (۳) $\sqrt{۳}$ (۴) ۲

۱۷ در شکل زیر، M وسط AB و $OM = ۲OC$ است. اگر A' تصویر A در تجانس به مرکز O و نسبت تجانس K باشد، مقدار K کدام است؟



۱) $-\frac{۱}{۳}$
۲) $-\frac{۱}{۴}$
۳) $-\frac{۱}{۵}$
۴) $-\frac{۱}{۶}$

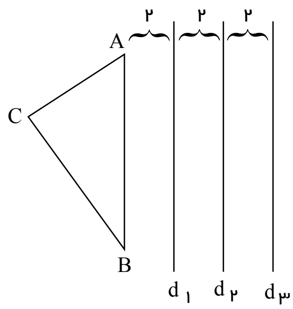
۱۸ مربعی را ۴۵° حول نقطهٔ تلاقی قطرهای آن دوران می‌دهیم. اگر مساحت سطح محصور بین مربع و تصویر آن برابر $۴\sqrt{۲}+۴$ باشد، طول ضلع مربع کدام است؟

۱) $۱+\sqrt{۲}$
۲) $۲\sqrt{۲}-۱$
۳) $۲+\sqrt{۲}$
۴) $۲(\sqrt{۲}-۱)$

۱۹ مساحت سطح محصور بین یک مربع و تبدیل یافتهٔ آن تحت تجانس به مرکز یکی از رأس‌های مربع و نسبت $\frac{۳}{۲}$، برابر ۱۵ است، مساحت مربع اولیه کدام است؟

۱) ۸
۲) ۹
۳) ۱۰
۴) ۱۲

۲۰ مطابق شکل زیر، با فرض موازی بودن خطوط $d_۱$، $d_۲$ و $d_۳$ مثلث ABC را ابتدا نسبت به $d_۳$ بازتاب داده تا $A'B'C'$ به‌دست آید و سپس $A'B'C'$ را نسبت به $d_۲$ بازتاب می‌دهیم تا $A''B''C''$ حاصل شود و در نهایت $A''B''C''$ را نسبت به $d_۱$ بازتاب می‌دهیم، تا $A'''B'''C'''$ حاصل شود. اگر فاصلهٔ رأس A تا خط $d_۱$ برابر ۲ باشد، آنگاه طول AA''' کدام است؟



۱) ۸
۲) ۶
۳) ۴
۴) ۲

۲۱ نقاط A و B در یک طرف خط d قرار دارند. اگر A' و B' به ترتیب تصویرهای A و B تحت بازتاب نسبت به خط d باشند، در مورد چهارضلعی $ABB'A'$ کدام گزینه ممکن است درست نباشد؟

۱) قطرهای آن با هم برابرند.
۲) زوایای مجاور آن با هم برابر یا مکمل‌اند.
۳) قطرهای آن منصف همدیگرند.
۴) محاطی است.

۲۲ پاره‌خط MN به طول ۲ و خط d که همواره از نقطهٔ N می‌گذرد، مفروض هستند. هرگاه M' بازتاب M نسبت به d باشد، در این صورت با تغییر d، مجموعهٔ نقاط M' چه شکلی را به وجود می‌آورند؟

۱) دو خط موازی به فاصلهٔ ۲ از هم
۲) دایره‌ای به قطر ۲
۳) دو خط موازی به فاصلهٔ ۴ از هم
۴) دایره‌ای به قطر ۴

۲۳ نقطهٔ A روی دایرهٔ $C(O,۶)$ قرار دارد. این دایره را با زاویهٔ ۱۲۰° حول مرکز آن دوران می‌دهیم. اگر تصویر نقطهٔ A تحت این دوران نقطهٔ A' باشد، آن‌گاه طول پاره‌خط AA' کدام است؟

۱) ۳
۲) $۳\sqrt{۳}$
۳) ۶
۴) $۶\sqrt{۳}$

۲۴ در دوران مثلث متساوی‌الاضلاع حول نقطهٔ همرسی نیمسازهای مثلث، زاویهٔ دوران چقدر باشد تا پس از دوران، این مثلث بر خودش منطبق شود؟

۱) ۹۰°
۲) ۱۲۰°
۳) ۱۳۵°
۴) ۱۸۰°

۲۵ دایرهٔ $C(O,۳)$ را نسبت به خطی که از مرکز این دایره ۵ واحد فاصله دارد، بازتاب میدهیم. اگر حاصل این بازتاب، دایرهٔ C' باشد، آنگاه طول مماس مشترک داخلی دو دایرهٔ C و C' کدام است؟

۱) ۴
۲) ۶
۳) ۸
۴) ۱۰

۲۶ مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC $(\hat{A} = ۹۰^\circ)$ را که در آن طول اضلاع قائمه برابر $AB = ۲$ و $AC = ۴$ است، به مرکز C و به اندازه ۹۰° در جهت حرکت عقربه‌های ساعت دوران می‌دهیم. اگر B' تصویر نقطهٔ B در این دوران باشد، طول BB' کدام است؟

۱) $۲\sqrt{۵}$ ۲) $۲\sqrt{۱۰}$ ۳) $۵\sqrt{۲}$ ۴) ۵

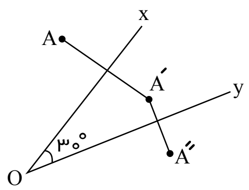
۲۷ دو دایرهٔ متخارج با نسبت $\frac{۳}{۵}$ مجانس یکدیگرند. اگر فاصلهٔ مرکز تجانس از مرکز دایرهٔ کوچک‌تر ۶ باشد، طول خط‌المرکزین این دو دایره کدام است؟

۱) ۴ ۲) ۶ ۳) ۸ ۴) ۱۰

۲۸ در تجانس به مرکز O و نسبت k، کدام‌یک از موارد زیر نادرست است؟

۱) اگر $k > ۰$، تجانس را تجانس مستقیم می‌نامیم.
۲) اگر $k < ۰$، تجانس را تجانس معکوس می‌نامیم.
۳) اگر $k < -۱$، تصویر شکل کوچک‌تر می‌شود.
۴) اگر $k > ۱$، تصویر شکل بزرگ‌تر می‌شود.

۲۹ در شکل زیر A' بازتاب A نسبت به نیم‌خط Ox و A'' بازتاب A' نسبت به نیم‌خط Oy است. اگر $OA = ۲$ باشد، مساحت مثلث OAA'' کدام است؟



۱) ۱ ۲) $\sqrt{۳}$ ۳) ۳ ۴) $۲\sqrt{۳}$

۳۰ تصویر چندضلعی منتظمی در دوران با هر یک از زوایای ۸۴° و ۱۰۸° حول مرکزش بر خودش منطبق می‌شود. حداقل تعداد اضلاع این چندضلعی کدام است؟

۱) ۲۰ ۲) ۳۰ ۳) ۴۰ ۴) ۶۰

سوالات مروری فصل سوم
روابط طولی در مثلث

۱) در مثلثی $\hat{A} = ۶۰^\circ$ و $b = \sqrt{۳} + ۱$ و $c = \sqrt{۳} - ۱$، زاویه‌ی $\hat{B}$ کدام است؟

۱) ۱۵° ۲) ۴۵° ۳) ۱۰۵° ۴) ۱۲۰°

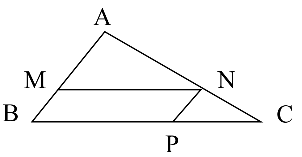
۲) در مثلث ABC ، ضلع $AC = ۶$ و میانه $BM = ۵$. نیمسازهای دو زاویه AMB و CMB دو ضلع دیگر این مثلث را در P و Q قطع می کنند. اندازه PQ کدام است؟

۱) ۳٫۲۵ ۲) ۳٫۵ ۳) ۳٫۷۵ ۴) ۴

۳) در مثلث ABC داریم $AB = ۳AC$ و $BC = ۱۲$ ، نقاط D و D' پای نیمسازهای داخلی و خارجی زاویه A است. مقدار $AD^۲ + AD'^۲$ ، کدام است؟

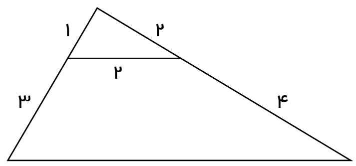
۱) ۶۴ ۲) ۷۲ ۳) ۸۱ ۴) ۱۰۰

۴) در شکل مقابل $\frac{MA}{MB} = \frac{۳}{۲}$ است. مساحت متوازی‌الاضلاع $MNPB$ چند درصد مساحت مثلث ABC است؟



۱) ۴۸ ۲) ۵۲
۳) ۵۴ ۴) ۵۶

۵) در شکل روبه‌رو، اندازهٔ ضلع بزرگتر چهارضلعی کدام است؟



۱) $۲\sqrt{۱۰}$ ۲) $۲\sqrt{۱۱}$
۳) $۴\sqrt{۳}$ ۴) $۵\sqrt{۲}$

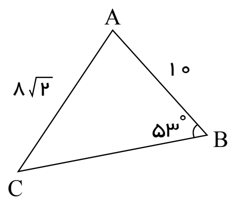
۶) در مثلث ABC : $(\hat{A} = ۹۰^\circ, AB = ۳, AC = ۴)$ ارتفاع AH و نیمساز داخلی AD رسم شده است. اندازه‌ی DH کدام است؟

۱) $\frac{۱۲}{۳۵}$ ۲) $\frac{۵}{۱۴}$ ۳) $\frac{۷}{۱۵}$ ۴) $\frac{۱۵}{۲۸}$

۷) در مثلث ABC، میانه‌ی AM و نیمسازهای دو زاویه‌ی AMB و AMC را رسم می‌کنیم تا دو ضلع AB و AC رابه ترتیب در D و E قطع کند. نسبت $\frac{DE}{BC}$ برابر کدام است؟

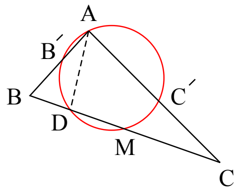
۱) $\frac{AM}{BC}$ ۲) $\frac{ME}{MC}$ ۳) $\frac{ME}{CE}$ ۴) $\frac{AD}{AB}$

۸) در مثلث شکل مقابل، طول BC کدام است؟ $(\sin ۵۳^\circ \sim ۰٫۸)$



۱) ۲ ۲) ۱۴
۳) ۱۰ ۴) ۶

۹) در مثلث ABC نقطه M وسط ضلع BC و AD نیمساز زاویه A است. دایره محیطی مثلث ADM رسم شده است. نسبت $\frac{BB'}{CC'}$ برابر کدام است؟

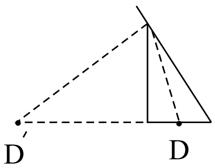


(۱) ۱ (۲) $\frac{AB}{AC}$ (۳) $\frac{AB'}{AC'}$ (۴) $\frac{DB}{DM}$

۱۰) اگر فرض شود در مثلثی مجذور طول نیمساز داخلی زاویه A برابر با حاصلضرب اضلاع آن زاویه است، استنباط چگونه است؟

(۱) $\hat{A} < ۹۰^\circ$ (۲) $\hat{A} = ۹۰^\circ$ (۳) $\hat{A} > ۹۰^\circ$ (۴) نادرستی فرض

۱۱) در مثلثی به اضلاع ۶، ۸ و ۵ واحد، نیمسازهای کوچک‌ترین زاویه‌ی آن ضلع مقابل و امتداد آن را در D و D' قطع می‌کنند. اندازه‌ی DD' چه قدر است؟

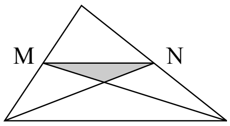


(۱) $\frac{۱۹۵}{۱۴}$ (۲) $\frac{۱۰۲}{۷}$ (۳) $\frac{۱۲۰}{۷}$ (۴) $\frac{۱۲۴}{۷}$

۱۲) در مثلث $AB = ۵$ ، $AC = ۷$ و $BC = ۶$ فاصله‌ی پای ارتفاع AH از وسط ضلع BC کدام است؟

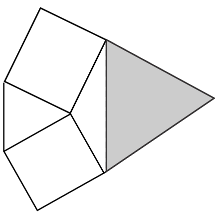
(۱) ۱٫۲۵ (۲) ۱٫۵ (۳) ۱ (۴) ۲

۱۳) در شکل مقابل نقاط M و N وسط دو ضلع است. مساحت بزرگترین مثلث، چند برابر مساحت مثلث سایه زده است؟



(۱) ۶ (۲) ۸ (۳) ۹ (۴) ۱۲

۱۴) در یک مثلث متساوی‌الاضلاع بر روی دو ضلع آن، دو مربع ساخته شده است. مساحت مثلث سایه زده، چند برابر مساحت مثلث اصلی است؟



(۱) ۲ (۲) ۲٫۲۵ (۳) ۳ (۴) ۴

۱۵) اضلاع مثلثی با اعداد ۲ و ۳ و ۴ متناسب است. نیمساز داخلی زاویه‌ی متوسط آن را رسم می‌کنیم. مساحت کوچک‌ترین مثلث حاصل، چند برابر مساحت مثلث اصلی است؟

(۱) $\frac{۲}{۹}$ (۲) $\frac{۱}{۴}$ (۳) $\frac{۱}{۳}$ (۴) $\frac{۲}{۵}$

۱۶) در مثلثی به اضلاع ۶ و ۵ و ۳ واحد نیمساز کوچکترین زاویه‌ی خارجی آن، بزرگترین ضلع مثلث را قطع می‌کند. مساحت مثلثی که در خارج مثلث اصلی تشکیل می‌شود چند برابر مساحت مثلث اصلی است؟

(۱) $\frac{۳}{۴}$ (۲) $\frac{۳}{۲}$ (۳) ۲ (۴) $\frac{۹}{۴}$

۱۷) مثلث متساوی الاضلاع به ضلع $\sqrt{۶}$ واحد را به سه مثلث همنهشت تقسیم کرده‌ایم. اندازه‌ی ضلع نابزرگتر از یک مثلث همنهشت چقدر است؟

(۱) ۱ (۲) $\sqrt{۲}$ (۳) $\frac{۳}{۲}$ (۴) $\sqrt{۳}$

۱۸) در بیرون مربعی به ضلع ۱ واحد بر روی دو ضلع مجاور آن، دو مثلث متساوی الاضلاع ساخته شده است. فاصله‌ی ۲ رأس جدید چقدر است؟

(۱) $\sqrt{۲}$ (۲) $\sqrt{۳}$ (۳) $۱ + \sqrt{۳}$ (۴) $\sqrt{۲ + \sqrt{۳}}$

۱۹) در مثلثی به اضلاع ۲۴، ۱۳ و ۱۳ واحد، شعاع دایره محیطی آن کدام است؟

(۱) ۱۲٫۶ (۲) ۱۳٫۲ (۳) ۱۵٫۳ (۴) ۱۶٫۹

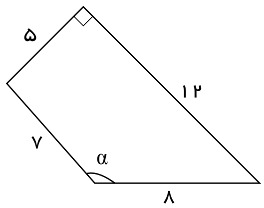
۲۰ در مثلث ABC نقطهٔ M وسط BC است. نیمسازهای دو زاویهٔ AMB و AMC دو ضلع مثلث را در P و Q قطع می‌کنند. نقطهٔ O محل تلاقی AM و PQ است. OM برابر کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۴}BC$ ۲) AQ ۳) OA ۴) OP

۲۱ در مثلث قائم‌الزاویه ABC، زاویهٔ $A = ۹۰^\circ$ و اندازهٔ اضلاع قائم ۳ و ۴ واحد است. ارتفاع AH و نیمساز AD رسم شده است. اندازهٔ DH، کدام است؟

۱) $\frac{۸}{۳۵}$ ۲) $\frac{۹}{۳۵}$ ۳) $\frac{۱۲}{۳۵}$ ۴) $\frac{۱۶}{۳۵}$

۲۲ در چهار ضلعی روبه‌رو، دو ضلع عمود برهم‌اند، $\sin \alpha$ کدام است؟



۱) $\frac{\sqrt{۲}}{۳}$ ۲) $\frac{۳}{۵}$

۳) $\frac{\sqrt{۳}}{۲}$ ۴) $\frac{۴}{۵}$